

# Lineare Algebra I+II

Matthias Schmid

7. November 2024

# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Lineare Algebra I</b>	<b>4</b>
<b>1</b>	<b>Zahlen</b>	<b>5</b>
1.1	Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$	5
1.1.1	Natürliche, ganze und rationale Zahlen	5
1.1.2	Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$	6
1.1.3	Körperstruktur auf $\mathbb{R}$	6
1.2	Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ – (Einführung)	8
1.2.1	Die imaginäre Einheit $i$	8
1.2.2	Komplexe Zahlenebene	9
1.2.3	Polarform von komplexen Zahlen	12
1.2.4	Körperstruktur auf $\mathbb{C}$	14
<b>2</b>	<b>Vektoren</b>	<b>16</b>
2.1	Der Standardvektorraum $\mathbb{K}^n$	16
2.1.1	Definition und Eigenschaften des $\mathbb{K}^n$	16
2.1.2	$\mathbb{K}^n$ als Vektorraum	17
2.2	Norm und Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$	18
2.2.1	Die Standardnorm auf $\mathbb{K}^n$	19
2.2.2	Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$	20
2.2.3	Öffnungswinkel	22
2.2.4	Orthogonalprojektion	25
2.3	Vektorprodukt	26
2.3.1	Geometrische Definition	26
2.3.2	Rechenregeln für das Vektorprodukt	27
2.3.3	Berechnung des Vektorprodukts	28
2.3.4	Anwendungen des Vektorprodukts	29
<b>3</b>	<b>Matrizen und lineare Gleichungssysteme</b>	<b>33</b>
3.1	Matrizenrechnung	33
3.1.1	$m \times n$ -Matrizen	33
3.1.2	Der Vektorraum $\mathbb{K}^{m \times n}$	34
3.2	Matrixprodukte	35
3.2.1	Produkt Matrix mal Vektor	35
3.2.2	Produkt zweier Matrizen	36
3.3	Lineare Gleichungssysteme	36
3.3.1	Beispiele von linearen Gleichungssystemen	37
3.3.2	Allgemeine lineare Gleichungssysteme	38
3.3.3	Gauss-Algorithmus	40
3.3.4	Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen	46
3.3.5	Homogene lineare Gleichungssysteme	49
3.4	LU-Zerlegung von Matrizen	51
3.4.1	Definition und Berechnung der LU-Zerlegung	51
3.4.2	Anwendung für die Lösung von linearen Gleichungssystemen	53
3.4.3	LU-Zerlegung mit Zeilenvertauschungen	55
3.5	Lineare Ausgleichsrechnung	56
3.5.1	Einführungsbeispiel: Regressionsgerade	56
3.5.2	Transponierte Matrix und symmetrische Matrizen	57
3.5.3	Normalgleichungen	60

3.6	Determinante von Matrizen . . . . .	63
3.6.1	Determinante von $2 \times 2$ -Matrizen . . . . .	63
3.6.2	Die Determinante von $3 \times 3$ -Matrizen . . . . .	65
3.6.3	Determinante von $n \times n$ -Matrizen . . . . .	67
3.7	Die Inverse einer Matrix . . . . .	69
3.7.1	Definition und Eigenschaften . . . . .	69
3.7.2	Berechnung der inversen Matrix (Gauss-Jordan-Algorithmus) . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Komplexe Zahlen und Funktionen</b>	<b>75</b>
4.1	Exponentialform von komplexen Zahlen . . . . .	75
4.1.1	Die Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ . . . . .	75
4.1.2	Die Eulersche Formel . . . . .	78
4.1.3	Argument einer komplexen Zahl . . . . .	81
4.1.4	Exponentialform von komplexen Zahlen . . . . .	82
4.2	Komplexwertige Funktionen . . . . .	82
4.3	Potenzen und Wurzeln von komplexen Zahlen . . . . .	83
4.4	Anwendungen von komplexen Zahlen . . . . .	85
4.4.1	Schwingungen . . . . .	85
4.4.2	Elektrischer Schwingkreis (LCR-Kreis) . . . . .	91
<b>II</b>	<b>Lineare Algebra II</b>	<b>97</b>
<b>5</b>	<b>Vektorräume</b>	<b>98</b>
5.1	Vektorräume . . . . .	98
5.2	Unterräume . . . . .	102
5.3	Lineare Unabhängigkeit . . . . .	105
5.3.1	Linearkombination und lineare Hülle . . . . .	105
5.3.2	Erzeugendensystem . . . . .	108
5.3.3	Lineare Unabhängigkeit . . . . .	109
5.4	Basis und Dimension . . . . .	111
5.5	Unendlich-dimensionale Vektorräume . . . . .	116
5.6	Vektorräume mit Skalarprodukt . . . . .	117
5.6.1	Normen auf Vektorräumen . . . . .	117
5.6.2	Skalarprodukte auf Vektorräumen . . . . .	120
5.6.3	Orthonormalbasen . . . . .	123
5.6.4	Gram-Schmidt-Verfahren . . . . .	124
5.7	Fourier-Reihen . . . . .	128
5.7.1	Fourier-Reihe in reeller Schreibweise . . . . .	129
5.7.2	Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise . . . . .	132
5.7.3	Amplituden-Phasen-Form der Fourierreihe . . . . .	137
5.7.4	Konvergenz der Fourier-Reihe . . . . .	138
5.8	Diskrete Fouriertransformation . . . . .	139
<b>6</b>	<b>Lineare Abbildungen und Matrizen</b>	<b>140</b>
6.1	Lineare Abbildungen . . . . .	140
6.1.1	Matrizen als lineare Abbildungen . . . . .	140
6.1.2	Homomorphismen . . . . .	141
6.2	Matrix einer linearen Abbildung . . . . .	143
6.3	Verkettung von linearen Abbildungen und Matrixprodukt . . . . .	148
6.4	Kern und Bild von linearen Abbildungen . . . . .	152
6.5	Isomorphismen . . . . .	157
6.5.1	Aus der Analysis: Umkehrabbildungen . . . . .	157
6.5.2	Umkehrung von linearen Abbildungen . . . . .	159
6.5.3	Matrix der Umkehrabbildung . . . . .	161
6.6	Basiswechsel . . . . .	161
6.7	Unitäre und orthogonale Abbildungen . . . . .	166

<b>7</b>	<b>Eigenwerte und Eigenvektoren</b>	<b>168</b>
7.1	Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	170
7.2	Diagonalisieren von Matrizen . . . . .	174
7.3	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	181
7.3.1	Lineare ODE n-ter Ordnung . . . . .	181

**Teil I**

**Lineare Algebra I**

# Kapitel 1

## Zahlen

Alles ist Zahl.

---

Pythagoras von Samos

### 1.1 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

#### 1.1.1 Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Die ersten Zahlen, mit welchen wir bereits seit der Kindheit vertraut sind, sind die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 usw. Dass es sich bei den natürlichen Zahlen auch um eine Menge handelt, ist schon abstrakter, auch weil es sich um eine Menge handelt, die unendlich viele Elemente enthält. In der Mathematik fasst man die Elemente einer Menge mit geschweiften Klammern  $\{\dots\}$  (engl.: curly braces) zusammen. Für die natürlichen Zahlen schreiben wir demnach

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}.$$

In Worte übersetzt lautet die obige Schreibweise: “Die Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  ist definiert als die Menge bestehend aus den Elementen 1, 2, 3 usw. Die Punkte stehen für das Wort ”und so weiter“. Sie deuten also an, dass es weitere Elemente in der Menge hat (ab 4 aufwärts bis unendlich). Die Menge der natürlichen Zahlen wird somit durch das Symbol  $\mathbb{N}$  abgekürzt. Wir haben das Symbol  $\mathbb{N}$  definiert und es steht nun künftig für die Menge der natürlichen Zahlen. Wenn wir z.B.  $n \in \mathbb{N}$  schreiben, dann heisst das in Worten: ”die Zahl  $n$  ist eine natürliche Zahl“. Oder wenn wir schreiben  $\exists r \notin \mathbb{N}$ , dann heisst das übersetzt: ”es gibt eine Zahl  $r$ , welche nicht zu den natürlichen Zahlen gehört“ ( $r$  könnte z.B.  $-5$  sein oder ein Bruch wie  $2/3$ ).

Auf der Menge  $\mathbb{N}$  gibt es bekanntlich zwei fundamentale Rechenoperationen, die Addition und die Multiplikation. Das heisst, man kann die Summe oder das Produkt von zwei natürlichen Zahlen berechnen und erhält als Resultat automatisch wieder eine natürliche Zahl. Erweitert man die natürlichen Zahlen auf die Menge der **ganzen Zahlen**

$$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\},$$

so wird auch die Subtraktion (das “Minusrechnen”) immer ausführbar (z.B.  $2 - 3 = -1$ ). Eine weitere Erweiterung der Zahlenmenge  $\mathbb{Z}$  ist nötig, wenn man nicht nur multiplizieren, sondern auch dividieren will – wir brauchen dafür das Bruchrechnen. Durch Division von ganzen Zahlen gelangen wir zu den **rationalen Zahlen**

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \wedge GGT(m, n) = 1 \right\}.$$

Die Menge der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  enthält die ganzen Zahlen als Teilmenge,  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ , aber zusätzlich auch alle unkürzbaren<sup>1</sup> Brüche. Dies führt dazu, dass auf  $\mathbb{Q}$  nun auch die Division (durch Zahlen ausser der 0) immer ausführbar wird (wie z.B. in  $2/5$ ) und man automatisch ein Resultat bekommt, dass wieder in  $\mathbb{Q}$  ist (sobald man den Bruch noch entsprechend gekürzt hat). Sind die Zahlen in  $\mathbb{Q}$  nun alle Zahlen, die es gibt? Erstaunlicherweise lautet die Antwort nein. Es gibt also Zahlen, die sich nicht als Brüche schreiben lassen. Dafür gibt es gleich mehrere Beispiele, von denen wir ein paar hier besprechen wollen:

Die Länge von Strecken ist nicht immer rational. So ist beispielsweise der Umfang eines Kreises gleich seinem Durchmesser mal  $\pi$ . Und es lässt sich zeigen, dass  $\pi \notin \mathbb{Q}$ . Die Zahl  $\pi$  kann also nicht als Bruch

---

<sup>1</sup>Daher steht in der Definition von  $\mathbb{Q}$  die Bedingung, dass der grösste gemeinsame Teiler (GGT) von Zähler und Nenner 1 sein muss.

geschrieben werden,  $\pi$  ist **irrational**. Ebenso ist die Länge der Diagonalen eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 gleich  $\sqrt{2}$ . Und  $\sqrt{2}$  ist ebenfalls keine rationale Zahl. Auch der berühmte *goldene Schnitt*, das Seitenverhältnis, das man z.B. für die Konstruktion eines Fünfecks braucht, ist kein Bruch, sondern eine irrationale Zahl. Die Existenz von irrationalen Zahlen wurde vom griechischen Philosophen und Mathematiker Hippasos von Metapont im 5. Jahrhundert vor Christus gefunden. Hippasos gehörte zu den Pythagoräern, einer philosophisch-religiösen Gemeinschaft – heute würde man sagen Sekte – um den Philosophen und Mathematiker Pythagoras. Einer Legende zufolge waren die Pythagoräer von der Entdeckung der irrationalen Zahlen dermassen geschockt, dass sie den bedauernswerten Hippasos mit Gewichten in ein Fass steckten und im Meer versenkten.<sup>2</sup>

Es gibt noch einen weiteren, etwas weniger offensichtlichen Grund, warum die Menge der rationalen Zahlen vergrößert werden sollte. Wir betrachten eine Zahlenfolge  $a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , die aus lauter rationalen Folgengliedern besteht. Ein Beispiel einer solchen Folge ist

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Folgenglieder der Folge  $a_n$  sind alle rational. Ein paar davon sind:

$$a_1 = 2 \quad a_2 = \frac{9}{4} = 2.25 \quad a_3 = \frac{64}{27} \approx 2.37 \quad a_4 = \frac{625}{256} \approx 2.44, \quad \dots, \quad a_{231} \approx 2.7124.$$

Es stellt sich heraus, dass wenn man  $n$  gegen unendlich gehen lässt, also  $n \rightarrow \infty$ , dass dann die Folge zu einem Grenzwert oder *Limes konvergiert*, der nicht rational ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718281828459045235 \dots \notin \mathbb{Q}.$$

Den Limes dieser Folge bezeichnet man mit  $e$ , und dies ist die berühmte **Eulersche Zahl**. Es gibt also gelinde gesagt jede Menge Zahlen, die nicht rational sind. Man kann sogar beweisen, dass es zwischen zwei beliebig nahe beieinander liegenden rationalen Zahlen immer noch unendlich viele irrationale Zahlen gibt.

### 1.1.2 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Die Menge der **reellen Zahlen**, welche mit  $\mathbb{R}$  bezeichnet wird, ist eine Erweiterung der rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  derart, dass auch alle erdenklichen irrationalen Zahlen wie z.B.  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$  und  $e$  zu  $\mathbb{R}$  gehören. Die rationalen Zahlen werden dann zu einer Teilmenge der reellen Zahlen,  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ , und die Menge  $\mathbb{R}$  ist **vollständig**. Das heisst, für jede Zahlenfolge in  $\mathbb{R}$ , die überhaupt einen Grenzwert hat<sup>3</sup>, liegt dieser Grenzwert oder **Limes** automatisch wieder in der Menge  $\mathbb{R}$ . Die rationalen Zahlen  $\mathbb{Q}$  sind für sich alleine nicht vollständig. Wir verzichten hier auf eine genauere Definition der reellen Zahlen, weil es gar nicht so einfach zu bewerkstelligen ist. Aber die Idee mit der “Vervollständigung” der rationalen Zahlen kommt einer genauen Definition schon ziemlich nahe.

### 1.1.3 Körperstruktur auf $\mathbb{R}$

Die beiden fundamentalen Rechenoperationen “Addition” und “Multiplikation” erfüllen auf der Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  gewisse Rechenregeln. Diese Rechenregeln heissen **Körperaxiome** und bilden die algebraische Rechenstruktur auf  $\mathbb{R}$ . Es gibt je vier Körperaxiome für die Addition und die Multiplikation plus ein Axiom, welches die beiden Operationen kombiniert. Insgesamt gibt es also neun Körperaxiome, die wie folgt lauten:

- Die Addition  $+$  ordnet jedem Paar von reellen Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl  $x + y \in \mathbb{R}$  zu mit den Eigenschaften:

- i) Assoziativität:

$$(x + y) + z = x + (y + z), \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

- ii) Neutralement der Addition (Existenz der Null):

$$\exists \mathbf{n} \in \mathbb{R} : x + \mathbf{n} = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Das Neutralement der Addition ist die Null:  $\mathbf{n} = 0$ .

<sup>2</sup>Wie so oft stimmt die Legende wohl nur zum Teil. Tatsache ist, dass Hippasos von den Pythagoräern ausgeschlossen wurde, aber wahrscheinlich waren politische Meinungsverschiedenheiten der Grund dafür. Offenbar ist er später dann bei einem Schiffbruch ums Leben gekommen.

<sup>3</sup>was nicht unbedingt der Fall sein muss. Folgen, die einen Grenzwert haben, heissen konvergent.

iii) Inverses Element der Addition (Existenz des Negativen):

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0.$$

Wir bezeichnen die Zahl  $y$  mit  $-x$ .

iv) Kommutativität:

$$x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Die Axiome i)-iv) machen aus den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  eine **abelsche Gruppe** bezüglich der Addition.

- Die Multiplikation  $\cdot$  ordnet jedem Paar von reellen Zahlen  $x, y \in \mathbb{R}$  eine reelle Zahl  $x \cdot y \in \mathbb{R}$  zu mit den Eigenschaften:

v) Assoziativität:

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

vi) Neutralelement der Multiplikation (Existenz der Eins):

$$\exists e \in \mathbb{R} : x \cdot e = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Das Neutralelement der Multiplikation ist die Eins:  $e = 1$ .

vii) Inverses Element der Multiplikation (Existenz des Kehrwerts):

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = 1.$$

Wir bezeichnen die Zahl  $y$  mit  $x^{-1}$  oder  $\frac{1}{x}$ .

viii) Kommutativität:

$$x \cdot y = y \cdot x \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Die Axiome v)-viii) sind genau analog zu den Axiomen i)-iv) für die Addition. Die Rolle der Null der Addition spielt die Eins bei der Multiplikation. Sie machen  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  zu einer abelschen Gruppe bezüglich der Multiplikation.

- Schliesslich gilt noch das Distributivgesetz:

ix)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Mit den neun Körperaxiomen wird die Menge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  zu einem sogenannten **Körper**.

Was hat es mit den etwas seltsam anmutenden Axiomen ii), iii), vi) und vii) auf sich? Nun, die Axiome ii) und iii) gewährleisten, dass Gleichungen der Form

$$x + a = b,$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}$ , nach  $x$  aufgelöst werden können. Andernfalls wäre dies nicht möglich. Man löst eine solche Gleichung nämlich, indem man auf beiden Seiten der Gleichung  $-a$  addiert, was man nur dann tun kann, wenn es das Inverse Element der Addition, also die Zahl  $-a$ , überhaupt gibt (Axiom iii)). Man bekommt erstmal

$$x + a + (-a) = b + (-a),$$

wendet Axiom iii) gleich nochmals an und erhält

$$x + 0 = b - a.$$

Dann benutzt man das Axiom ii) und bekommt schliesslich die Lösung:

$$x = b - a.$$

Analog verhält es sich mit den Axiomen vi) und vii) zur Multiplikation. Eine Gleichung vom Typ

$$ax = b$$

mit  $a, b \in \mathbb{R}$  löst man indem man auf beiden Seiten mit  $a^{-1}$  multipliziert, wofür  $a^{-1}$  existieren muss (Axiom vii)). Dies ergibt:

$$a^{-1}ax = a^{-1}b.$$

Man verwendet abermals Axiom vii) und erhält:

$$1x = \frac{b}{a},$$

und aus Axiom vi) bekommt man schliesslich

$$x = \frac{b}{a}.$$

Aus diesen Überlegungen erkennen wir, dass wir beim Lösen von Gleichungen – wie wir uns das gewohnt sind – schon diese Rechenstruktur auf der Menge  $\mathbb{R}$  benutzt haben, ohne dass es uns näher bewusst war. Eine der grossen Errungenschaften der Mathematik ist es, solche mathematischen Strukturen wie diese Körperaxiome aufzudecken und zusammenzustellen, um sie dann auf andere, allgemeinere Objekte zu erweitern. Und genau dies wollen wir im nächsten Abschnitt tun.

## 1.2 Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ – (Einführung)

### 1.2.1 Die imaginäre Einheit $i$

Wir haben die reellen Zahlen kennengelernt und verstehen, wie man mit diesen Zahlen rechnet. Wir haben die reellen Zahlen durch sukzessive Erweiterungen der natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen erhalten. An diesem Punkt stellt sich jetzt wieder die Frage – sind die reelle Zahlen alle Zahlen, die es gibt? Es ist klar, dass der Abstand zwischen zwei Punkten im Raum bzw. die Länge einer Strecke immer eine reelle Zahl ist. Physikalische Grössen, wie die Geschwindigkeit einer Masse oder der elektrische Strom in einem Kabel usw. sind immer reelle Zahlen (mit einer Einheit versehen). Es sieht also so aus, dass wir keine zusätzlichen Zahlen benötigen. Können wir denn mit den reellen Zahlen auch alle möglichen Gleichungen lösen? Betrachten wir dazu die Gleichung:

$$z^2 + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad z^2 = -1. \quad (1.1)$$

Es ist völlig klar, dass diese Gleichung keine reelle Zahl als Lösung haben kann, denn das Quadrat einer reellen Zahl (auch einer negativen) ist immer positiv. Wenn wir also eine Lösung für diese Gleichung erhalten möchten, müssen wir uns etwas Neues einfallen lassen. Und das haben die Mathematiker im 18. Jahrhundert getan, und es hat sich später als sehr nützlich erwiesen. Die erste Idee ist, die Lösung der Gleichung (1.1) mit einem neuen Symbol zu bezeichnen. Wir legen also fest, dass die Lösung der Gleichung (1.1) eine Zahl ist, die  $i$  heissen soll. Es gilt also:

$$i^2 = -1.$$

Wie gesagt, ist schon einmal von vornherein klar, dass  $i \notin \mathbb{R}$ .  $i$  heisst **imaginäre Einheit**<sup>4</sup> und  $i$  ist eine sogenannte **imaginäre Zahl**.<sup>5</sup> Die quadratische Gleichung (1.1) hat aber noch eine zweite Lösung, nämlich  $-i$ . Die beiden Lösungen sind von (1.1) sind also  $z = \pm i$ . Kontrollieren wir das kurz:

$$\begin{aligned} i^2 + 1 &= -1 + 1 = 0 && \checkmark, \\ (-i)^2 + 1 &= (-i)(-i) + 1 = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0 && \checkmark. \end{aligned}$$

Betrachten wir als weiteres Beispiel die quadratische Gleichung

$$z^2 - 4z + 13 = 0.$$

Kommen wir auch hier mit der neuen Zahl  $i$  weiter? Wir verwenden die Auflösungsformel (Mitternachtsformel) für quadratische Gleichungen und erhalten

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}.$$

Wir erhalten eine negative Diskriminante  $D = -36$ . Die Wurzel  $\sqrt{-36}$  ist nicht definiert. Aus  $i^2 = -1$  folgt jedoch, dass wir die Diskriminante als  $D = 36i^2$  schreiben können. Wir bekommen also als Lösungen die beiden imaginären Zahlen

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i.$$

<sup>4</sup>Das Symbol  $i$  für die Quadratwurzel aus  $-1$  wurde erstmals vom Basler Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783) im Jahr 1777 verwendet.

<sup>5</sup>Der Begriff "imaginär" geht auf den italienischen Mathematiker Gerolamo Cardano zurück und bringt zum Ausdruck, dass Zahlen wie  $i$  nicht wirklich, sondern eben nur in der Einbildung (italienisch: *imaginatio*), also imaginär existieren, wie man damals glaubte. Das sieht man heute natürlich ganz anders.

Wieder machen wir ein Kontrolle, um uns zu vergewissern, dass dieses Resultat stimmt. Einsetzen in die ursprüngliche quadratische Gleichung liefert

$$z_1^2 - 4z_1 + 13 = (2 + 3i)^2 - 4(2 + 3i) + 13 = 4 + 12i + 9i^2 - 8 - 12i + 13 = 4 - 9 - 8 + 13 = 0 \quad \checkmark.$$

Das heisst, die Lösung  $z_1$  erfüllt tatsächlich die quadratische Gleichung. Analog erhält man

$$z_2^2 - 4z_2 + 13 = (2 - 3i)^2 - 4(2 - 3i) + 13 = 4 - 12i + 9i^2 - 8 + 12i + 13 = 4 - 9 - 8 + 13 = 0 \quad \checkmark.$$

Es gibt also auch Zahlen von der Form  $x + yi$ , wobei  $x$  und  $y$  reelle Zahlen sind. Diese Tatsache führt uns auf die folgende Definition:

**Definition 1.2.1 (Komplexe Zahlen  $\mathbb{C}$ )**

Die Menge der **komplexen Zahlen**  $\mathbb{C}$  ist definiert als

$$\mathbb{C} := \left\{ z \mid z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1 \right\}.$$

Man beachte die aus dieser Definition ersichtlichen Folgerungen:

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , die reellen Zahlen sind eine Teilmenge der komplexen Zahlen. Die reellen Zahlen sind also auch komplexe Zahlen, nämlich genau diejenigen mit  $y = 0$ .
- Zur Begrifflichkeit: **imaginär** bezeichnet man nur die Zahlen, die ein  $i$  drin haben, also diejenigen Zahlen mit  $y \neq 0$ .

In den folgenden Abschnitten wollen wir uns noch etwas detaillierter mit den komplexen Zahlen beschäftigen, insbesondere wollen wir lernen, wie man komplexe Zahlen addiert und miteinander multipliziert. Im Kapitel 4 werden wir dann noch weitere Eigenschaften der komplexen Zahlen besprechen und eigentlich werden wir erst dann (hoffentlich) so richtig kapieren, wofür man diese Zahlen gebrauchen kann.

### 1.2.2 Komplexe Zahlenebene

Die reellen Zahlen können auf einer Geraden dargestellt werden, der reellen **Zahlengerade**. Eine komplexe Zahl  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  ist durch *zwei* reelle Zahlen  $x$  und  $y$  eindeutig bestimmt. Diese beiden reellen Zahlen können als Punkt  $(x|y)$  oder als Vektor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  in einer Ebene dargestellt werden. Diese Ebene heisst **komplexe Zahlenebene** oder **Gaussche Zahlenebene**.

**Definition 1.2.2 (Real- und Imaginärteil)**

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  eine komplexe Zahl. Dann bezeichnet

$$\operatorname{Re}(z) := x$$

den **Realteil** und

$$\operatorname{Im}(z) := y$$

den **Imaginärteil** der komplexen Zahl  $z$ . Komplexe Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Im}(z) \neq 0$  heissen **imaginär**, imaginäre Zahlen mit  $\operatorname{Re}(z) = 0$  bezeichnet man als **rein imaginär**. Die komplexen Zahlen mit  $\operatorname{Im}(z) = 0$  sind natürlich nichts anderes als die reellen Zahlen.

**Bemerkungen:**

- Der Realteil und der Imaginärteil sind Funktionen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- In der komplexen Zahlenebene entspricht die Addition von komplexen Zahlen der Addition von Vektoren.

**Definition 1.2.3 (Komplexe Konjugation und Absolutbetrag)**

Sei  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  eine komplexe Zahl.

- Die komplexe Zahl  $\bar{z} := x - iy$  heisst die zu  $z$  **konjugiert komplexe Zahl**.
- Der **Absolutbetrag** oder kurz **Betrag** der komplexen Zahl  $z$  ist die (nicht-negative) reelle Zahl

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

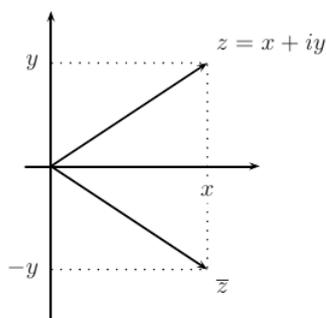


Abbildung 1.1: Eine komplexe Zahl  $z$  und ihre Konjugierte  $\bar{z}$ .

**Bemerkungen:**

- Die komplexe Konjugation  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \bar{z}$  entspricht geometrisch der Spiegelung an der reellen Achse in der Gaußschen Zahlenebene (siehe Abb. 1.1).
- Der Betrag  $|z|$  einer komplexen Zahl  $z$  entspricht der Länge des “Vektors” in der Ebene  $\mathbb{C}$ .

Im folgenden Satz stellen wir noch einige zusätzliche Eigenschaften zusammen:

**Satz 1.2.4**

Seien  $z, w \in \mathbb{C}$ . Dann gilt:

- i)  $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- ii)  $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- iii)  $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- iv)  $\overline{\bar{z}} = z$
- v)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- vi)  $\overline{z \bar{w}} = \bar{z} \cdot w$
- vii)  $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$

*Beweis.* i)

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{x + yi + x - yi}{2} = \frac{2x}{2} = x = \operatorname{Re}(z).$$

ii)

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{x + yi - (x - yi)}{2i} = \frac{2yi}{2i} = y = \operatorname{Im}(z).$$

iii) klar

iv) klar

v) Seien  $z = x + yi$  und  $w = u + vi$ . Dann ist

$$\overline{z + w} = \overline{x + yi + u + vi} = x - yi + u - vi = \bar{z} + \bar{w}.$$

vi) Seien  $z = x + yi$  und  $w = u + vi$ . Dann ist

$$\overline{z \bar{w}} = \overline{xu - yv + (xv + yu)i} = xu - yv - (xv + yu)i = (x - yi)(u - vi) = \bar{z}w.$$

vii) Einerseits ist

$$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{z\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$$

Andererseits gilt:

$$\frac{\bar{1}}{z} = \frac{\bar{\bar{z}}}{z\bar{z}} = \frac{\overline{\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)}}{|z|^2} = \frac{\bar{\bar{z}}}{|z|^2} = \frac{z}{|z|^2}$$

also dasselbe wie oben. □

**Satz 1.2.5**

Der Absolutbetrag

$$|\cdot| : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$|z| := \sqrt{z\bar{z}}$$

erfüllt die folgenden Eigenschaften:

i)  $|\cdot|$  ist definit:

$$|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

ii)  $|\cdot|$  ist absolut homogen:

$$|wz| = |w| |z| \quad \forall w, z \in \mathbb{C}$$

iii)  $|\cdot|$  ist subadditiv (Dreiecksungleichung):

$$|w + z| \leq |w| + |z| \quad \forall w, z \in \mathbb{C}$$

*Beweis.* i) Es gilt:

$$|z|^2 = z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2i^2 = x^2 + y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |z| \geq 0.$$

Die Gleichheit trifft genau dann zu, wenn  $x = 0$  und  $y = 0$ , dann ist  $z = 0 + 0 \cdot i = 0$ .

ii) Gemäss der Definition des Betrages gilt:

$$|wz|^2 = wz\bar{w}\bar{z} = wz\bar{w}\bar{z} = w\bar{w}z\bar{z} = |w|^2 |z|^2,$$

also  $|wz| = |w| |z|$ .

iii) Es gilt:

$$\begin{aligned} |w + z|^2 &= (w + z)(\overline{w + z}) = (w + z)(\bar{w} + \bar{z}) = w\bar{w} + w\bar{z} + \bar{w}z + z\bar{z} = \\ &= |w|^2 + w\bar{z} + \bar{w}z + |z|^2 = |w|^2 + 2\operatorname{Re}(w\bar{z}) + |z|^2 \leq |w|^2 + 2|w||z| + |z|^2 = \\ &= (|w| + |z|)^2. \end{aligned}$$

Damit ist  $|w + z| \leq |w| + |z|$ . □**Wichtige Unterschiede zwischen  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ :**

- Auf den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  existiert eine **totale Ordnung**, das heisst für zwei reelle Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt stets

$$a \leq b \vee a \geq b.$$

Auf den komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist es unmöglich, eine mit der Addition und Multiplikation verträgliche Ordnung einzuführen. Ausdrücke wie  $z > 0$  oder  $z \geq w$  machen für imaginäre Zahlen  $w, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  keinen Sinn. Es können höchstens die Beträge der komplexen Zahlen verglichen werden, also z.B.  $|z| \geq |w|$  oder  $|z| \leq |w|$ .

- Für eine reelle Zahl  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $|a|^2 = a^2$ . Für eine komplexe Zahl  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  ist jedoch:

$$\begin{aligned} |z|^2 &= x^2 + y^2 \\ z^2 &= (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, \end{aligned}$$

also  $|z|^2 \neq z^2!$

### 1.2.3 Polarform von komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  werden in der **kartesischen** Schreibweise,

$$z = x + yi$$

als Punkte der komplexen Ebene aufgefasst. Statt dem Realteil  $x$  und Imaginärteil  $y$  können wir für  $z$  auch die sogenannten **Polarkoordinaten**  $(r, \varphi)$  angeben. Bei Polarkoordinaten werden anstatt der beiden kartesischen Koordinaten  $x$  und  $y$  in einer Ebene (und für die Zahlenebene  $\mathbb{C}$  geht das auch) der Abstand  $r$  vom Ursprung (d.h. die Länge des Vektorpfeils) und der Winkel zur  $x$ -Achse  $\varphi$  angegeben.

Der Radius  $r$  entspricht dem Betrag der komplexen Zahl, also

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Der Winkel  $\varphi$  ist der Winkel, den die Zahl zur reellen Achse einschliesst. Real- und Imaginärteil sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}x &= |z| \cos(\varphi) = r \cos(\varphi), \\y &= |z| \sin(\varphi) = r \sin(\varphi).\end{aligned}$$

Wenn wir die Gleichung für den Imaginärteil durch diejenige für den Realteil teilen, erhalten wir

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}.$$

Nach  $\varphi$  aufgelöst, bekommen wir:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dabei müssen wir aber berücksichtigen, dass

$$\arctan : ]-\infty, \infty[ \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

und somit muss man eine Fallunterscheidung für die Punkte der linken und rechten Halbebene machen. Ausserdem ist die Formel ja für  $x = 0$ , also für Punkte auf der imaginären Achse nicht definiert. Zieht man dies alles in Betracht, erhält man eine Formel für den Polarwinkel  $\varphi \in [0, 2\pi[$ :

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \wedge y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0, \\ \frac{3\pi}{2} & x = 0 \wedge y < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi & x > 0 \wedge y < 0, \\ \text{nicht definiert} & x = y = 0. \end{cases}$$

Damit können wir die komplexe Zahl  $z$  in der sogenannten **Polarform**

$$z = \underbrace{x + yi}_{\text{kartesische Form}} = r \underbrace{(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))}_{\text{Polarform}}$$

schreiben (siehe Abb. 1.2).

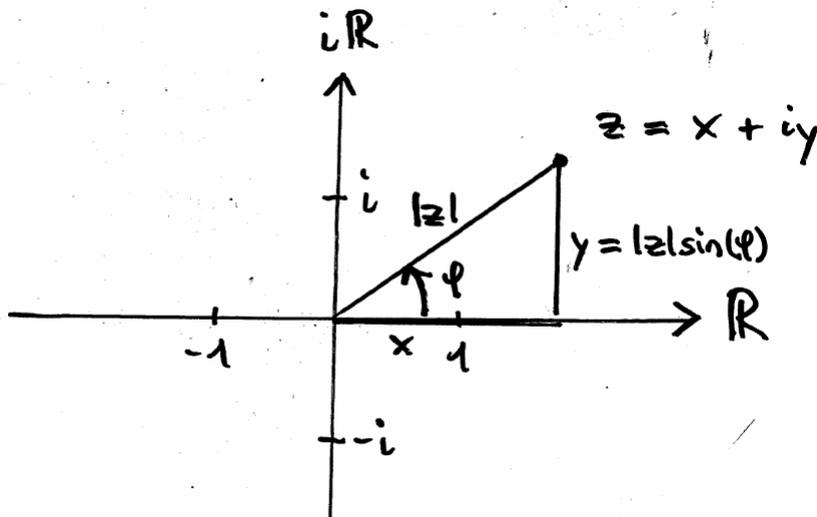


Abbildung 1.2: Kartesische Form und Polarform einer komplexen Zahl  $z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ .

**Bemerkungen:**

- i) Die Polarform einer komplexen Zahl ist nicht eindeutig. Addieren wir ein Vielfaches von  $2\pi$  zum Winkel, erhalten wir in kartesischer Form die genau gleiche komplexe Zahl. So ist zum Beispiel für die Umrechnung der komplexen Zahl  $z = 3 - 4i$  in die Polarform

$$3 - 4i = 5(\cos(5.356) + i \cdot \sin(5.356))$$

oder

$$3 - 4i = 5(\cos(-0.9273) + i \cdot \sin(-0.9273))$$

richtige Varianten. Ja sogar ist  $\forall k \in \mathbb{Z}$ :

$$3 - 4i = 5(\cos(-0.9273 + 2\pi \cdot k) + i \cdot \sin(-0.9273 + 2\pi \cdot k)) .$$

- ii) Um eine eindeutige Winkelangabe zu treffen, wählt man häufig per Konvention den Winkel im Intervall  $]-\pi, \pi]$ . Wird der Polarwinkel  $\varphi$  in diesem Intervall angegeben, wird er als das **Argument** der komplexen Zahl  $z = x + y \cdot i$  bezeichnet. Die Formel, mit der wir das Argument der komplexen Zahl erhalten, lautet:

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0 \wedge y < 0, \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y < 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0, \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \wedge y > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \wedge y \geq 0, \\ \text{nicht definiert} & x = y = 0. \end{cases}$$

- iii) Man kann auch die arccos-Funktion verwenden. Dann kommt man mit weniger Fallunterscheidungen aus. Für den Polarwinkel  $\varphi \in [0, 2\pi[$  bekommt man:

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y < 0, \\ \text{nicht definiert} & x = y = 0. \end{cases}$$

Für das Argument der komplexen Zahl (Winkel im Intervall  $]-\pi, \pi]$ ) lautet die Formel dann:

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y \geq 0, \\ -\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & y < 0, \\ \text{nicht definiert} & x = y = 0. \end{cases}$$

### Beispiele:

i) Schreiben Sie die komplexe Zahl  $i$  in Polarform.

Lösung:

$$|i| = |0 + 1 \cdot i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Also ist:

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

ii) Stellen Sie die komplexe Zahl

$$z = 3 \left( \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right)$$

in kartesischer Form dar.

Lösung:

Wir brauchen bloss  $\cos$  und  $\sin$  auszuwerten:

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$$

somit

$$z = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.$$

## 1.2.4 Körperstruktur auf $\mathbb{C}$

Die Addition und die Multiplikation auf der Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ist eigentlich gar nicht schwierig. Man braucht nur Eines dafür zu wissen, nämlich  $i^2 = -1$ . Sonst rechnet man genau so wie mit reellen Zahlen.

### Definition 1.2.6 (Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ )

Auf der Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  gibt es folgende zwei Verknüpfungsvorschriften (Rechenoperationen):

i) Die Addition  $+$ , welche zwei komplexen Zahlen  $z_1 = x_1 + iy_1$  und  $z_2 = x_2 + iy_2$  die Summe  $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$ , definiert

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

zuordnet.

ii) Die Multiplikation  $\cdot$ , die den Zahlen  $z_1$  und  $z_2$  das Produkt  $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{C}$  zuordnet, definiert durch

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i.$$

Wir zeigen nun, dass die Addition und Multiplikation auf der Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  ebenfalls die neun Körperaxiome erfüllt, genauso wie die reellen Zahlen:

### Satz 1.2.7

Die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  mit der Addition  $+$  und der Multiplikation  $\cdot$  ist ein Körper.

*Beweis.* i) Seien  $z_1 = x_1 + y_1i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2i$  und  $z_3 = x_3 + y_3i$ . Dann gilt:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = (x_1 + y_1i + x_2 + y_2i) + x_3 + y_3i = (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3)i =$$
$$= x_1 + y_1i + [x_2 + x_3 + (y_2 + y_3)i] = x_1 + y_1i + (x_2 + y_2i + x_3 + y_3i) = z_1 + (z_2 + z_3).$$

Das heisst, die Addition ist assoziativ.

ii) Das Neutralelement für die Addition ist die komplexe Zahl  $0 + 0 \cdot i = 0 \in \mathbb{C}$ , denn es gilt offensichtlich

$$z + 0 = x + yi + 0 + 0 \cdot i = (x + 0) + (y + 0)i = x + yi = z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

iii) Das Inverse Element von  $z = x + yi$  bezüglich der Addition ist die Zahl  $-z := -x - yi$ , denn es gilt:

$$z + (-z) = x + yi + (-x - yi) = (x - x) + (y - y)i = 0 + 0 \cdot i = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

iv) Seien  $z_1 = x_1 + y_1i$  und  $z_2 = x_2 + y_2i$ . Dann ist

$$z_1 + z_2 = x_1 + y_1i + x_2 + y_2i = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i = (x_2 + x_1) + (y_2 + y_1)i = x_2 + y_2i + x_1 + y_1i = z_2 + z_1.$$

Das heisst, die Addition ist kommutativ.

v) Seien  $z_1 = x_1 + y_1i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2i$  und  $z_3 = x_3 + y_3i$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (z_1 z_2) \cdot z_3 &= [x_1 x_2 - y_1 y_2 + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i] \cdot (x_3 + y_3i) = \\ &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 y_3 i - y_1 y_2 x_3 - y_1 y_2 y_3 i + x_1 y_2 x_3 i - x_1 y_2 y_3 + y_1 x_2 x_3 i - y_1 x_2 y_3 = \\ &= x_1(x_2 x_3 - y_2 y_3 + (x_2 y_3 + x_3 y_2)i) + y_1 i(x_2 x_3 - y_2 y_3 + (x_2 y_3 + x_3 y_2)i) = \\ &= (x_1 + y_1 i) \cdot [x_2 x_3 - y_2 y_3 + (x_2 y_3 + x_3 y_2)i] = z_1 \cdot (z_2 z_3). \end{aligned}$$

Die Multiplikation ist assoziativ.

vi) Das Neutralelement für die Multiplikation ist die komplexe Zahl  $1 + 0 \cdot i = 1$ , denn es gilt offensichtlich

$$1 \cdot z = (1 + 0 \cdot i)(x + yi) = 1 \cdot x + 1 \cdot yi = x + yi = z \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

vii) Für jedes  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist der Kehrwert  $z^{-1}$  gegeben durch:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x - yi}{(x + yi)(x - yi)} = \frac{x - yi}{x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i.$$

viii) Seien  $z_1 = x_1 + y_1i$  und  $z_2 = x_2 + y_2i$ . Dann ist

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2)i = \\ &= (x_2 x_1 - y_2 y_1) + (x_2 y_1 + y_2 x_1)i = (x_2 + y_2i) \cdot (x_1 + y_1i) = z_2 z_1. \end{aligned}$$

Die Multiplikation ist kommutativ.

ix) Seien  $z_1 = x_1 + y_1i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2i$  und  $z_3 = x_3 + y_3i$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} z_1(z_2 + z_3) &= (x_1 + y_1i)[x_2 + x_3 + (y_2 + y_3)i] = \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 y_2 i + x_1 y_3 i - y_1 y_2 - y_1 y_3 + y_1 x_2 i + y_1 x_3 i = \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 - y_1 y_2 - y_1 y_3 + (x_1 y_2 + y_1 x_2 + x_1 y_3 + y_1 x_3)i. \end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist aber:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 + z_1 z_3 &= (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) + (x_1 + y_1i)(x_3 + y_3i) = \\ &= x_1 x_2 + x_1 y_2 i + y_1 x_2 i - y_1 y_2 + x_1 x_3 + x_1 y_3 i + y_1 x_3 i - y_1 y_3 = \\ &= x_1 x_2 + x_1 x_3 - y_1 y_2 - y_1 y_3 + (x_1 y_2 + y_1 x_2 + x_1 y_3 + y_1 x_3)i. \end{aligned}$$

Wir erhalten also zweimal dasselbe, damit ist die Distributivität  $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$  tatsächlich erfüllt.  $\square$

Damit ist also auch  $\mathbb{C}$  bewiesenermassen ein Körper. Das ist nun genauso ein Beispiel, wie man in der Mathematik häufig vorgeht. Man geht von etwas Bekanntem aus wie den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  und analysiert dessen mathematische Struktur (Körperaxiome). Dann "erfindet" man etwas Neues wie die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  und macht das möglichst so, dass man die schon bekannte mathematische Struktur wiederfindet. Wir werden so ein Vorgehen öfters in dieser Vorlesung antreffen.

# Kapitel 2

## Vektoren

Im grossen Garten der Geometrie  
kann sich jeder nach seinem  
Geschmack einen Strauss  
pflücken.

---

David Hilbert

Im letzten Kapitel haben wir die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  und die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  besprochen. Wir haben gesehen, dass es sich bei diesen beiden Mengen um sogenannte algebraische Körper handelt. In der linearen Algebra wählt man – je nach Problemstellung – einen der beiden Körper als Grundlage, d.h. als Grundmenge von Zahlen mit denen man rechnet. In diesem Zusammenhang werden Elemente aus dem Körper auch **Skalare** genannt. Unter einem **Skalar** versteht man also eine Zahl aus dem Körper, im Gegensatz zu den **Vektoren**, welche Gegenstand dieses Kapitels sein werden. Für einige Themen dieses Kapitels ist es nicht relevant, welche Wahl des Körpers ( $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) man getroffen hat. Für diesen Fall benutzen wir das Symbol  $\mathbb{K}$  und verstehen darunter den gewählten Körper, also entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

### 2.1 Der Standardvektorraum $\mathbb{K}^n$

In diesem Abschnitt lernen wir neben den Zahlen ein weiteres grundlegendes Werkzeug der linearen Algebra kennen, **Vektoren**. Was ist ein Vektor? In der Physik bezeichnet man eine physikalische Grösse als Vektor, wenn diese Grösse neben ihrem Betrag auch noch eine Richtung hat. Beispiele dafür sind die Geschwindigkeit oder die Kraft. Oft symbolisiert man einen Vektor durch einen Pfeil. Die Lage von Punkten in der Ebene oder im Raum kann man ebenfalls durch einen solchen Pfeil (einen **Ortsvektor**) darstellen. Der Ortsvektor eines Punktes zeigt vom Nullpunkt (Ursprung) des Koordinatensystems her zum betreffenden Punkt. In der linearen Algebra versteht man nur unter dem letzten beschriebenen Fall einen Vektor.

#### 2.1.1 Definition und Eigenschaften des $\mathbb{K}^n$

**Definition 2.1.1 (Standardraum  $\mathbb{K}^n$ )**

Der **Standardraum**  $\mathbb{K}^n$  ist die Menge aller  $n$ -Tupel,<sup>1</sup>

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

von Zahlen in  $\mathbb{K}$ , also die Menge

$$\mathbb{K}^n := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_k \in \mathbb{K}, 1 \leq k \leq n \right\},$$

wobei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Die Elemente von  $\mathbb{K}^n$  bezeichnet man als **Vektoren**.

---

<sup>1</sup>Das Wort “Tupel” stammt aus dem lateinischen Anhängsel “-tuplus” und entspricht der deutschen Endung “-fach”. Ein  $n$ -Tupel ist also übersetzt ein “ $n$ -fach”.

### Bemerkungen:

- i) Unter dem **Nullvektor** des  $\mathbb{K}^n$  versteht man den Vektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

der meistens einfach mit 0 bezeichnet wird.

- ii) Zu jedem Vektor  $x \in \mathbb{K}^n$  gibt es einen Vektor  $-x \in \mathbb{K}^n$  gegeben durch

$$-x = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich dabei um einen Ortsvektor in entgegengesetzter Richtung, also um den am Nullpunkt gespiegelten Punkt zu  $x$ . Im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  kann man sich das leicht klarmachen.

- iii) Als Spezialfall definieren wir noch  $\mathbb{K}^0 := \{0\}$ . Der  $\mathbb{K}^0$  enthält also als einzigen Vektor den Nullvektor.  $\mathbb{K}^0$  ist also nicht die leere Menge, sondern eine Menge, welche als einziges Element den Nullvektor enthält.

### Beispiele:

- 1)  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ : Zahlengerade
- 2)  $\mathbb{R}^2$ : Ebene, Menge aller Punkte mit Koordinaten  $(x_1|x_2)$  (oder  $(x|y)$ ). Dabei müssen die Koordinaten nicht unbedingt örtlich zu verstehen sein. So kann man z.B. auch das Phasendiagramm eines Stoffes  $(T, P)$ , wobei  $T$  die Temperatur und  $P$  der Druck bezeichnen, als "Ebene"  $\mathbb{R}^2$  auffassen.
- 3)  $\mathbb{R}^3$ : 3-dimensionaler Raum, Menge aller Punkte mit Koordinaten  $(x_1|x_2|x_3)$  (oder  $(x|y|z)$ ).
- 4)  $\mathbb{R}^4$ : wird z.B. in der Physik verwendet um die Raum-Zeit zu beschreiben. Punkte in der Raum-Zeit heissen *Ereignisse* und werden durch  $(ct, x, y, z)$  dargestellt, wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist.

### 2.1.2 $\mathbb{K}^n$ als Vektorraum

Auf dem Standardraum  $\mathbb{K}^n$  gibt es zwei fundamentale Rechenoperationen: die Addition  $+$  und die **Skalarmultiplikation**  $\cdot$ . Die Addition  $+$  ordnet zwei Vektoren  $x, y \in \mathbb{K}^n$  einen Vektor  $x + y \in \mathbb{K}^n$  zu, definiert durch

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Die Skalarmultiplikation  $\cdot$  ordnet einem Vektor  $x \in \mathbb{K}^n$  und einer Zahl aus  $\mathbb{K}$ , genannt **Skalar**, ein Produkt  $\lambda \cdot x \in \mathbb{K}^n$  zu, definiert durch

$$\lambda \cdot x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Wir können also auch auf der Menge der Vektoren (mit  $n$  Einträgen) addieren und multiplizieren. Aber Achtung, die Multiplikation multipliziert Skalare (Zahlen aus  $\mathbb{K}$ ) mit Vektoren. Das ist also etwas anderes, als die Multiplikation von zwei Zahlen aus  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ . Es handelt sich dabei geometrisch um eine Streckung oder Stauchung von Vektoren. Und die Skalarmultiplikation hat auch nichts mit dem Skalarprodukt (siehe Abschnitt 2.2.2) oder dem Vektorprodukt (siehe Abschnitt 2.3) zu tun.

Die Addition und die Skalarmultiplikation auf dem Menge der Vektoren  $\mathbb{K}^n$  erfüllen folgende Rechenregeln, die wir als **Vektorraumaxiome** bezeichnen:

- Die Addition erfüllt folgende Eigenschaften:

- i) Assoziativität:

$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{K}^n$$

ii) Neutralelement der Addition (Nullvektor):

$$x + 0 = x \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$$

iii) Inverses Element der Addition:

$$\forall x \in \mathbb{K}^n : x + (-x) = 0$$

iv) Kommutativität:

$$x + y = y + x \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$$

• Die Skalarmultiplikation erfüllt folgende Eigenschaften:

v) Assoziativität:

$$(\lambda\mu) \cdot x = \lambda(\mu \cdot x) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad x \in \mathbb{K}^n$$

vi) Neutralität der Eins (Neutralelement der Skalarmultiplikation):

$$1 \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$$

• Schliesslich sind noch folgende zwei Distributivgesetze erfüllt:

vii)

$$\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad x, y \in \mathbb{K}^n$$

viii)

$$(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Die vier Vektorraumaxiome zur Addition sind identische zu denjenigen, welche wir für die reellen und komplexen Zahlen in den Abschnitten 1.1.3 und 1.2.4 kennengelernt haben. Bei der Skalarmultiplikation und den Distributivgesetzen ergeben sich jedoch Unterschiede, welche das Rechnen mit Vektoren anders machen als das Rechnen mit Zahlen.

### Unterschied von Körper und Vektorraum:

Ist der  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) mit der Addition und Multiplikation definiert durch

$$x + y := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad x \cdot y := \begin{pmatrix} x_1 y_1 \\ x_2 y_2 \\ \vdots \\ x_n y_n \end{pmatrix}$$

ein Körper?

Antwort: Nein. Das Problem ist, dass es z.B. keinen Kehrwert (Inverses Element der Multiplikation) zum Vektor

$$\begin{pmatrix} 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}, \quad * \text{ ist eine beliebige Zahl}$$

gibt. Das Körper-Axiom vii) ist verletzt.

## 2.2 Norm und Skalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$

Wir kennen nun den Vektorraum  $\mathbb{K}^n$  und können Vektoren aus  $\mathbb{K}^n$  addieren, subtrahieren und mit einem Skalar aus dem Körper  $\mathbb{K}$  multiplizieren. Wir haben aber noch nicht über die Länge eines Vektors gesprochen, und wir wissen auch noch nicht, wie man z.B. den Abstand oder den Winkel zwischen zwei Vektoren ausrechnet. Genau darum geht es in diesem Abschnitt. Wir starten mit der Länge von Vektoren, genannt *Norm*.

### 2.2.1 Die Standardnorm auf $\mathbb{K}^n$

Es ist klar, dass die Länge eines Vektors eine nicht negative reelle Zahl sein sollte, sonst würde das nur wenig Sinn machen. Im  $\mathbb{R}^2$  kann man den Satz des Pythagoras benutzen, um die Länge eines Vektors zu berechnen. So hat z.B. der Vektor

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

die Länge  $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ . Die Norm, die wir hier definieren wollen, soll dieses Prinzip auf den  $\mathbb{K}^n$  verallgemeinern.

#### Definition 2.2.1 (Standardnorm auf $\mathbb{K}^n$ )

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{K}^n &\longrightarrow [0, \infty[ \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

definiert durch

$$\|x\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

heißt **Standardnorm** des  $\mathbb{K}^n$ .

#### Bemerkungen:

- i) Eine Norm wird mit dem Symbol  $\|\cdot\|$  bezeichnet und ordnet also einem Vektor eine nicht-negative reelle Zahl zu, sodass man diese als Länge des Vektors interpretieren kann.
- ii) Man beachte, dass es für die Standardnormen auf  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  den kleinen aber feinen Unterschied gibt:

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ \|z\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} = \sqrt{z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + \dots + z_n \bar{z}_n}, \quad z \in \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

Also z.B.

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 &\Rightarrow \|x\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}. \\ z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 &\Rightarrow \|z\| = \sqrt{1^2 + (2i) \cdot (-2i)} = \sqrt{1 - 4i^2} = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

- iii) Wir werden in Abschnitt 5.6 sehen, dass es noch andere Normen gibt. Die Standardnorm wird dann zur Unterscheidung oft mit dem Symbol  $\|\cdot\|_2$  bezeichnet.

#### Satz 2.2.2

Die Standardnorm des  $\mathbb{K}^n$  erfüllt folgende Eigenschaften:

- i)  $\|\cdot\|$  ist **definit**:

$$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0.$$

- ii)  $\|\cdot\|$  ist **absolut homogen**:

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathbb{K}^n$$

- iii)  $\|\cdot\|$  ist **subadditiv** (Dreiecksungleichung):

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$$

#### Bemerkungen:

- Für Skalare (Zahlen) aus  $\mathbb{K}$  entspricht die Norm  $\|x\|$  einfach dem Betrag  $|x|$  der Zahl.
- Vor allem für Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  oder  $\mathbb{R}^3$  verwendet man für  $\|x\|$  auch die Begriffe "Länge eines Vektors  $x$ " oder "Betrag eines Vektors  $x$ ".

### Definition 2.2.3 (Normierter Vektor)

Ein Vektor  $x \in \mathbb{K}^n$  mit Norm 1, also  $\|x\| = 1$ , heisst **normierter** Vektor oder **Einheitsvektor**.

#### Bemerkung:

Sei  $x \in \mathbb{K}^n$  ein beliebiger Vektor. Dann ist der Vektor  $\frac{x}{\|x\|}$  ein Einheitsvektor in der gleichen Richtung wie  $x$ . Warum? Na weil:

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} \cdot x \right\| = \left| \frac{1}{\|x\|} \right| \|x\| = \frac{1}{\|x\|} \|x\| = 1,$$

wobei wir die absolute Homogenität der Norm (Eigenschaft ii) aus Satz 2.2.2 verwendet haben.

#### Aufgabe:

Sei ein Vektor  $x \in \mathbb{R}^4$  gegeben durch

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen einen Vektor  $y \in \mathbb{R}^4$ , welcher kollinear zu  $x$  ist, d. h. in die gleiche Richtung zeigt wie  $x$ , aber die Länge (Norm) 1 hat.

#### Lösung:

Wir berechnen zuerst die Norm von  $x$ :

$$\|x\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-5)^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 9 + 25} = \sqrt{38}.$$

Der gesuchte Einheitsvektor ist dann

$$y = \frac{1}{\|x\|} x = \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{38}} \\ \frac{3}{\sqrt{38}} \\ -\frac{5}{\sqrt{38}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt automatisch  $\|y\| = 1$ .

### Metrik auf $\mathbb{K}^n$

Mit der Norm sind automatisch auch Abstände *zwischen* Vektoren bzw. Punkten definiert. Nehmen wir zwei Vektoren (oder Punkte)  $x, y \in \mathbb{K}^n$ . Dann ist der Abstand zwischen den beiden Punkten die Norm des Differenzvektors:

$$\text{dist}(x, y) := \|y - x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |y_k - x_k|^2}.$$

Also erst dadurch, dass man eine Norm von Vektoren berechnen kann, führt dazu, dass man auch die Länge von beliebigen Strecken messen kann.

### 2.2.2 Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$

Mit Hilfe der Norm kann die Länge von Vektoren und damit die Distanz zwischen Punkten im  $\mathbb{K}^n$  berechnet werden. Man hat aber noch nicht die Möglichkeit, Winkel zu berechnen. Dafür ist eine weitere geometrische Eigenschaft nötig, nämlich das Skalarprodukt.

#### Definition 2.2.4 (Standardskalarprodukt)

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}, \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

definiert durch

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i = \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \dots + \overline{x_n} y_n$$

heisst **Standardskalarprodukt** oder **kanonisches<sup>2</sup> Skalarprodukt** auf dem  $\mathbb{K}^n$ .

<sup>2</sup>kanonisch=natürlich von lateinisch: *canon*=Regel, Norm

**Bemerkung:**

Für das Skalarprodukt werden in der Literatur verschiedene Notationen verwendet:  $xy$ ,  $x \cdot y$  oder eben:  $\langle x, y \rangle$ .

**Satz 2.2.5**

Das Standardskalarprodukt erfüllt auf dem  $\mathbb{R}^n$  folgende Eigenschaften:

i) Das Skalarprodukt ist **bilinear**:

$$\begin{aligned}\langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \quad \text{und} \quad \langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \\ \langle \lambda x, y \rangle &= \lambda \langle x, y \rangle, \quad \text{und} \quad \langle x, \lambda y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n\end{aligned}$$

ii) Das Skalarprodukt ist **symmetrisch**:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

iii) Das Skalarprodukt ist **positiv-definit**:

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Das Skalarprodukt ist eine symmetrische, positiv-definite Bilinearform.

Aufgrund der komplexen Konjugation in der Definition des komplexen Skalarprodukts hat dieses leicht andere Eigenschaften:

**Satz 2.2.6**

Das Skalarprodukt erfüllt auf  $\mathbb{C}^n$  folgende Eigenschaften:

i) Das Skalarprodukt ist **sesquilinear**<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\langle c + w, z \rangle &= \langle c, z \rangle + \langle w, z \rangle, \quad \text{und} \quad \langle c, w + z \rangle = \langle c, w \rangle + \langle c, z \rangle \quad \forall c, w, z \in \mathbb{C}^n \\ \langle \lambda w, z \rangle &= \bar{\lambda} \langle w, z \rangle, \quad \text{und} \quad \langle w, \lambda z \rangle = \lambda \langle w, z \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, w, z \in \mathbb{C}^n\end{aligned}$$

ii) Das Skalarprodukt ist **hermitesch**:<sup>4</sup>

$$\langle w, z \rangle = \overline{\langle z, w \rangle} \quad \forall w, z \in \mathbb{C}^n$$

iii) Das Skalarprodukt ist **positiv-definit**:

$$\langle z, z \rangle \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^n \quad \text{und} \quad \langle z, z \rangle = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

Das Standardskalarprodukt auf  $\mathbb{C}^n$  ist eine hermitesche, positiv-definite Sesquilinearform.

**Beispiele:**

1)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Dann ist

$$\langle v_1, v_2 \rangle = 5 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 13$$

2)

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3, \quad c_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 - i \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

Dann ist

$$\langle c_1, c_2 \rangle = 1 \cdot i + (-i) \cdot (1 - i) + (-i) \cdot (-2) = i - i + i^2 - 2i = -1 + 2i.$$

Umgekehrt ist

$$\langle c_2, c_1 \rangle = (-i) \cdot 1 + (1 + i) \cdot i + (-2)i = -i + i + i^2 - 2i = -1 - 2i = \overline{\langle c_1, c_2 \rangle}.$$

<sup>3</sup>lateinisch: *sesqui*=anderthalb. Der Begriff kommt daher, dass das komplexe Skalarprodukt eben nicht bilinear ist, sondern dass bei der 2. Komponente komplex konjugiert werden muss.

<sup>4</sup>Nach dem französischen Mathematiker Charles Hermite (1822-1901).

## Beziehung zwischen Standardnorm und Standardskalarprodukt

Die Norm eines Vektors  $x \in \mathbb{K}^n$  ergibt sich aus dem Skalarprodukt, denn aus der Definition der Norm folgt:

$$\begin{aligned}\|x\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in \mathbb{R}^n \\ \|z\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i z_i} = \sqrt{\langle z, z \rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^n\end{aligned}$$

Also gilt für einen beliebigen Vektor  $x \in \mathbb{K}^n$ :

$$\boxed{\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}}. \quad (2.1)$$

Man sagt, das Standardskalarprodukt induziert die Standardnorm. Dies bedeutet, dass zu einem Skalarprodukt immer eine zugehörige Norm gehört. Das wird dann wichtig werden, wenn wir verschiedene Skalarprodukte und Normen betrachten. Dann muss man verwendetes Skalarprodukt, immer die Norm verwenden, welche durch Gl. (2.1) gegeben ist.

### 2.2.3 Öffnungswinkel

In diesem Abschnitt wollen wir eine Formel für den Winkel zwischen zwei beliebigen Vektoren im  $\mathbb{R}^n$  finden. Wir lassen uns dabei leiten von der Situation im  $\mathbb{R}^2$ , weil wir uns im  $\mathbb{R}^2$  die Vektoren gut vorstellen und aufzeichnen können.

#### Repetition: Cosinussatz

##### Satz 2.2.7 (Cosinussatz)

Für ein beliebiges Dreieck in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  mit Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$  gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma),$$

wobei  $\gamma$  der Winkel zwischen den Seiten  $a$  und  $b$  ist.

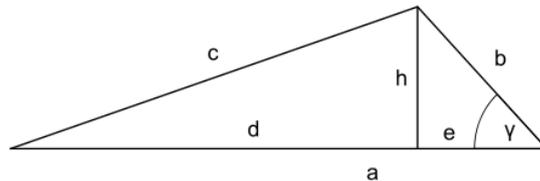


Abbildung 2.1: Ein beliebiges Dreieck mit Seiten  $a$ ,  $b$  und  $c$ . Der Winkel  $\gamma$  ist der Seite  $c$  gegenüberliegend.

*Beweis.* Die Situation ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Aus dem Satz des Pythagoras angewendet auf das kleine, rechtwinklige durch die Höhe gebildete Dreieck  $cdh$  folgt

$$c^2 = h^2 + d^2.$$

$h$  kann man mit dem Satz des Pythagoras des rechtwinkligen Dreiecks  $bhe$  schreiben als

$$h^2 = b^2 - e^2.$$

Daraus folgt

$$c^2 = h^2 + d^2 = b^2 - e^2 + d^2.$$

Für die Strecke  $d = a - e$  gilt wiederum

$$d^2 = (a - e)^2 = a^2 - 2ae + e^2.$$

Setzt man dies in den Ausdruck für  $c^2$  ein, bekommt man

$$c^2 = b^2 - e^2 + d^2 = b^2 - e^2 + a^2 - 2ae + e^2 = a^2 + b^2 - 2ae.$$

Jetzt müssen wir noch den Winkel  $\gamma$  mit ins Spiel bringen. Es ist

$$\cos(\gamma) = \frac{e}{b} \Rightarrow e = b \cos(\gamma).$$

Wir bekommen den gesuchten Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma). \quad \square$$

Aus dem Cosinussatz lässt sich eine Formel ableiten, die den Winkel  $\varphi$  zwischen zwei Vektoren  $a$  und  $b$  durch das Skalarprodukt ausdrückt (siehe Abb. 2.2).

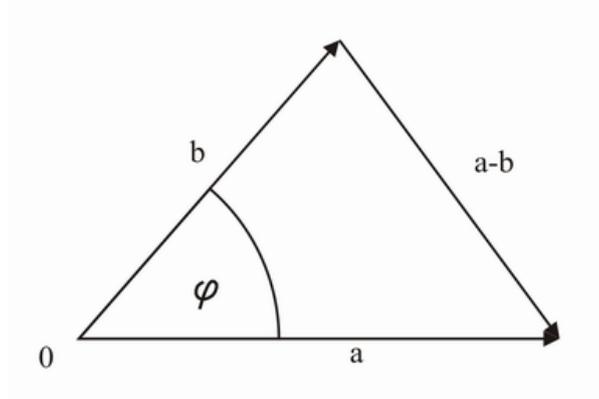


Abbildung 2.2: Zwei Vektoren  $a$  und  $b$  spannen ein Dreieck auf, wobei der Nullpunkt dann eine Ecke sein muss. Der Öffnungswinkel zwischen  $a$  und  $b$  ist  $\varphi$  und die gegenüberliegende Seite ist dann der Vektor  $c = a - b$ .

Der Cosinussatz liefert uns die Beziehung

$$\|c\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\| \cdot \|b\| \cos(\varphi)$$

oder mit Skalarprodukten ausgedrückt:

$$\langle c, c \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle - 2\|a\| \cdot \|b\| \cos(\varphi).$$

Jetzt ersetzen wir  $c = a - b$  und bekommen

$$\begin{aligned} \langle a - b, a - b \rangle &= \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle - 2\|a\| \cdot \|b\| \cos(\varphi) \\ \Leftrightarrow \langle a, a \rangle - \langle a, b \rangle - \langle b, a \rangle + \langle b, b \rangle &= \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle - 2\|a\| \cdot \|b\| \cos(\varphi) \\ \Leftrightarrow -2\langle a, b \rangle &= -2\|a\| \cdot \|b\| \cos(\varphi) \\ \Leftrightarrow \langle a, b \rangle &= \|a\| \cdot \|b\| \cos(\varphi) \end{aligned}$$

Wir haben den wichtigen Zusammenhang zwischen dem Skalarprodukt und dem Winkel gefunden, nämlich

$$\langle a, b \rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cos(\varphi).$$

Aufgelöst nach  $\varphi$  erhalten wir:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}\right)$$

Die obige Herleitung haben wir im  $\mathbb{R}^2$  durchgeführt. Doch diese Formel ist ganz allgemein auch im  $\mathbb{R}^n$  gültig. Denn auch im  $\mathbb{R}^n$  bilden zwei Vektoren  $a$  und  $b$  ein ebenes Dreieck. Deshalb definieren wir:

**Definition 2.2.8 (Öffnungswinkel/Zwischenwinkel)**

Seien  $x, y \in \mathbb{R}^n$  zwei beliebige Vektoren, wobei  $x \neq 0$  und  $y \neq 0$ . Der **Öffnungswinkel**  $\varphi$  zwischen  $x$  und  $y$  sei definiert durch

$$\varphi = \angle(x, y) := \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}\right). \quad (2.2)$$

wobei  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

### Bemerkungen:

- Die Funktion  $\arccos$  hat das Intervall  $[0, \pi]$  als Wertebereich. Der Öffnungswinkel, den wir mit der Formel (2.2) bekommen, ist also immer ein Winkel zwischen 0 und  $\pi$ .
- Wenn das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren  $x$  und  $y$  verschwindet, dann wird das Argument im  $\arccos$  null und damit bekommen wir einen Winkel von  $\pi/2$ . Folglich stehen die Vektoren senkrecht aufeinander. Umgekehrt erhält man den Winkel  $\pi/2$  genau nur im Fall, wenn das Skalarprodukt null ist. Es gilt also

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0.$$

Das heisst, Rechtwinkligkeit oder **Orthogonalität** von Vektoren ist gleichbedeutend mit Skalarprodukt ist gleich null.

- Die Definition des Winkels macht nur Sinn, wenn das Argument der Funktion  $\arccos$  im Intervall  $[-1, 1]$  zu liegen kommt, denn das ist der Definitionsbereich von  $\arccos$ <sup>5</sup>. Und das ist tatsächlich automatisch gewährleistet durch die sogenannte **Cauchy-Schwarz Ungleichung**. Man kann allgemein beweisen, dass die Ungleichung<sup>6</sup>

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n.$$

immer gültig ist. Damit ist gewährleistet, dass in der Formel (2.2) stets

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq 1$$

gilt. Die Cauchy-Schwarz Ungleichung ist eine wichtige Eigenschaft von Vektoren, die Konsequenzen bis in die Quantenphysik hat (Stichwort Unschärferelation). Im Abschnitt 5.6 werden wir diese berühmte Ungleichung noch in einer allgemeineren Version kennenlernen.

### Beispiele:

1) Seien

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann beträgt der Winkel zwischen  $x$  und  $y$ :

$$\cos(\angle(x, y)) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{3 \cdot 0 + 0 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 0^2} \sqrt{0^2 + 2^2}} = \frac{0}{3 \cdot 2}.$$

Daraus folgt, dass

$$\cos(\angle(x, y)) = 0 \Rightarrow \angle(x, y) = \frac{\pi}{2}.$$

Wie erwartet bekommen wir als Winkel  $90^\circ$ , da die Vektoren aufeinander senkrecht stehen.

2) Seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dann beträgt der Winkel zwischen  $a$  und  $b$ :

$$\cos(\angle(a, b)) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1 \cdot 1 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Wir bekommen

$$\angle(a, b) = \frac{\pi}{4}$$

was  $45^\circ$  entspricht, wie erwartet.

<sup>5</sup>Der Cosinus eines Winkels ist stets zwischen  $-1$  und  $1$ . Daher muss die Umkehrfunktion des Cosinus, also der Arcuscosinus den Definitionsbereich  $[-1, 1]$  haben.

<sup>6</sup>Das  $\leq$  wird zu einem  $=$ , genau dann wenn entweder  $x = 0$  oder  $x$  und  $y$  **kollinear** sind, d.h. wenn  $\exists \lambda \in \mathbb{K} : y = \lambda x$ .

- 3) Um das Vorzeichen des Skalarproduktes in der Formel für den Öffnungswinkel zu verstehen, berechnen wir noch den Winkel zwischen

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = -b = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Diesmal bekommen wir

$$\cos(\angle(a, c)) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \cdot \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1)}{1 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

und somit

$$\angle(a, c) = \frac{3\pi}{4}.$$

Mit anderen Worten bei einem positiven Skalarprodukt ist der Öffnungswinkel spitz, bei einem negativen Skalarprodukt ist er stumpf.

## 2.2.4 Orthogonalprojektion

Was geht da eigentlich geometrisch ab bei der Berechnung eines Skalarprodukts? Um das herauszufinden, benutzen wir wieder unseren Sandkasten, den  $\mathbb{R}^2$ , weil wir uns da die Vektoren gut vorstellen und aufmalen können. Betrachten wir die Situation in der Abbildung 2.3. Wir nehmen an, dass die beiden Vektoren  $a$  und  $b$  gegeben sind und wir uns für den Vektor  $b_a$  interessieren.  $b_a$  ist die sogenannte

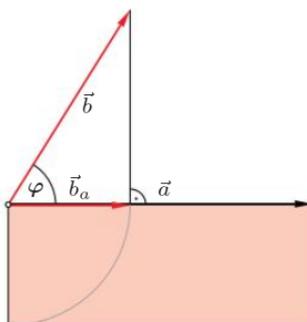


Abbildung 2.3: Zwei Vektoren  $a$  und  $b$  im  $\mathbb{R}^2$  mit Zwischenwinkel  $\varphi$ . Der Vektor  $b_a$  ist die Orthogonalprojektion von  $b$  auf  $a$ .

**Orthogonalprojektion** oder **Normalprojektion** des Vektors  $b$  auf den Vektor  $a$ . Wie finden wir den Vektor  $b_a$  nun heraus? Es ist klar, dass  $a$  und  $b_a$  die gleiche Richtung haben. Verkürzen wir zuerst  $a$  auf einen Einheitsvektor

$$e_a = \frac{a}{\|a\|}, \quad \|e_a\| = 1.$$

Dann können wir den gesuchten Vektor  $b_a$  als ein Vielfaches von  $e_a$  schreiben:

$$b_a = \lambda e_a = \lambda \frac{a}{\|a\|}.$$

Die Zahl  $\lambda$  entspricht dem Betrage nach der Länge des Vektors  $b_a$ , d.h.

$$|\lambda| = \|b_a\|.$$

Das Vorzeichen von  $\lambda$  hängt aber davon ab, ob der Winkel  $\varphi$  stumpf oder spitz ist. Wir finden

$$\lambda = \begin{cases} \|b_a\| & \varphi \text{ spitz,} \\ -\|b_a\| & \varphi \text{ stumpf.} \end{cases}$$

Wir brauchen also noch die Länge (Norm)  $\|b_a\|$  des Vektors  $b_a$ . Dafür kommt der Winkel ins Spiel.  $\|b_a\|$  ist die Ankathete des rechtwinkligen Dreiecks und daher

$$\|b_a\| = \|b\| \cdot |\cos(\varphi)| = \begin{cases} \|b\| \cos(\varphi) & \varphi \text{ spitz,} \\ -\|b\| \cos(\varphi) & \varphi \text{ stumpf,} \end{cases}$$

wobei wir wieder achtsam mit dem Vorzeichen von  $\cos$  haben umgehen müssen, damit alles stimmt. Schliesslich bekommen wir (egal ob  $\varphi$  spitz oder stumpf ist)

$$b_a = \lambda \cdot \frac{a}{\|a\|} = \|b\| \cos(\varphi) \frac{a}{\|a\|}.$$

Im letzten Abschnitt haben wir jedoch gelernt, dass man den Winkel  $\varphi$  mit der Formel

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

berechnen kann. Setzt man dies ein, bekommen wir schliesslich für die Orthogonalprojektion die Formel

$$b_a = \|b\| \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \cdot \|b\|} \frac{a}{\|a\|} = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\|^2} a. \quad (2.3)$$

Nimmt man auf beiden Seiten von Gl. (2.3) die Norm erhält man

$$\|b_a\| = \frac{|\langle a, b \rangle|}{\|a\|}.$$

Löst man dies nach dem Skalarprodukt auf, bekommt man weiter

$$|\langle a, b \rangle| = \|b_a\| \|a\|. \quad (2.4)$$

Dieser Zusammenhang ist in Abb. 2.3 also rote Fläche dargestellt. Man kann das Skalarprodukt (zumindest seinen Betrag) also als Fläche dieses roten Rechtecks interpretieren. Das Vorzeichen des Skalarprodukts liefert noch die Zusatzinformation, ob der Zwischenwinkel  $\varphi$  spitz oder stumpf ist.

## 2.3 Vektorprodukt

### 2.3.1 Geometrische Definition

#### Definition 2.3.1

Unter dem **Vektor-** oder **Kreuzprodukt** zwischen zwei Vektoren  $a \in \mathbb{R}^3$  und  $b \in \mathbb{R}^3$  versteht man den Vektor

$$n = a \times b \in \mathbb{R}^3$$

mit den folgenden drei Eigenschaften:

- i) Der Vektor  $n$  ist senkrecht auf  $a$  und  $b$ , kurz:  $n \perp a$  und  $n \perp b$  (siehe Abbildung 2.4).

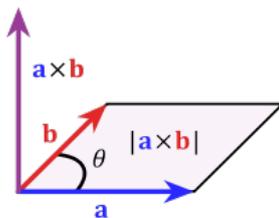


Abbildung 2.4: Das Vektorprodukt zweier Vektoren  $a$  und  $b$  (Quelle: Wikipedia).

- ii) Die Orientierung von  $n$  ist durch die sogenannte **Rechte-Hand-Regel** festgelegt (siehe Abbildung 2.5).

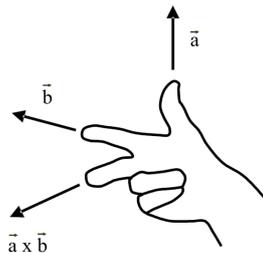


Abbildung 2.5: Rechte-Hand-Regel für das Vektorprodukt  $a \times b$ .

iii) Die Norm von  $n$  ist gegeben durch

$$\|n\| = \|a \times b\| = \|a\| \|b\| \sin(\vartheta),$$

wobei  $\vartheta$  der Öffnungswinkel zwischen  $a$  und  $b$  ist.

Durch diese drei Eigenschaften ist der Vektor  $n$  eindeutig bestimmt.

#### Bemerkungen:

i) Zur Abgrenzung zwischen Skalar- und Vektorprodukt wird das Skalarprodukt manchmal auch als **inneres Produkt** (engl.: inner product, dot product) und das Vektor- oder Kreuzprodukt dann als **äusseres Produkt** (engl.: exterior product, cross product) bezeichnet. Denn während das innere Produkt eine Zahl als Resultat liefert, ergibt das äussere Produkt einen Vektor, der ausserhalb der (von  $a$  und  $b$  aufgespannten) Ebene liegt. Das Vektorprodukt führt also aus der Ebene hinaus.

ii) Für das Skalar- und das Vektorprodukt gelten also die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\|a \times b\| &= \|a\| \|b\| \sin(\vartheta), \\ \langle a, b \rangle &= \|a\| \|b\| \cos(\vartheta),\end{aligned}$$

wobei  $\vartheta$  der Öffnungswinkel zwischen  $a$  und  $b$  ist. Der Winkel  $\vartheta$  liegt per definitionem im Intervall zwischen  $0$  und  $\pi$ .

iii) Die Norm des Vektorprodukts entspricht genau der Fläche des von  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms (vgl. Abb. 2.5).

#### Satz 2.3.2

Für zwei Vektoren  $a \in \mathbb{R}^3$  und  $b \in \mathbb{R}^3$ , wobei  $b \neq 0$  sein soll, gilt:

$$a \times b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \lambda b, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Das heisst, das Vektorprodukt ist genau dann der Nullvektor, wenn die Vektoren kollinear (linear abhängig) sind.

*Beweis.*  $\Rightarrow$ : Wenn  $a \times b = 0$  dann folgt  $\|a \times b\| = 0$ . Dann ist entweder der Vektor  $a$  der Nullvektor oder der Winkel zwischen  $a$  und  $b$  ist  $0$  oder  $\pi$ . In beiden Fällen ist so oder so  $a = \lambda b$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

$\Leftarrow$ : Sei also  $a = \lambda b$  für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Falls  $\lambda = 0$  ist  $a = 0$  und damit sowieso  $a \times b = 0$ . Wenn andererseits  $\lambda \neq 0$ , dann bedeutet dies, dass der Öffnungswinkel zwischen  $a$  und  $b$  gleich  $0$  oder gleich  $\pi$  ist. Dann ist aber  $\sin(\vartheta) = 0$ . Daraus folgt wiederum, dass  $\|a \times b\| = 0$  (das von  $a$  und  $b$  aufgespannte Parallelogramm hat die Fläche  $0$ ). Aus der Eigenschaft i aus Satz 2.2.2 (Definitheit) folgt dann wiederum, dass der Vektor  $a \times b$  der Nullvektor sein muss.  $\square$

## 2.3.2 Rechenregeln für das Vektorprodukt

#### Satz 2.3.3

Für das Vektorprodukt gelten die folgenden Rechenregeln:

i) Das Vektorprodukt ist **antikommutativ**:

$$a \times b = -b \times a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3.$$

ii) Das Vektorprodukt ist **distributiv**:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}^3.$$

iii) Es gilt:

$$\lambda(a \times b) = (\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**Bemerkung:**

Das Vektorprodukt ist *nicht assoziativ*, d.h. im allgemeinen ist

$$a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c,$$

wie folgendes Gegenbeispiel beweist: für die drei Basisvektoren gilt nämlich

$$e_1 \times e_2 = e_3, \tag{2.5a}$$

$$e_1 \times e_3 = -e_2, \tag{2.5b}$$

$$e_2 \times e_3 = e_1 \tag{2.5c}$$

Somit gilt z.B.:

$$e_1 \times (e_1 \times e_2) = e_1 \times e_3 = -e_2.$$

Es gilt aber ebenfalls, dass

$$(e_1 \times e_1) \times e_2 = 0 \times e_2 = 0,$$

aufgrund von Satz 2.3.2. Also kann das Vektorprodukt nicht assoziativ sein.

**2.3.3 Berechnung des Vektorprodukts**

Wir wollen nun eine Berechnungsformel für das Vektorprodukt herleiten. Es seien die Vektoren  $a$  und  $b$  gegeben durch

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3,$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3.$$

Für das Vektorprodukt gilt unter Benutzung der Rechenregeln aus Satz 2.3.3 und der Vektorprodukte der Basisvektoren aus Gleichungen (2.5):

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \times (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) \\ &= a_1 b_1 (e_1 \times e_1) + a_1 b_2 (e_1 \times e_2) + a_1 b_3 (e_1 \times e_3) \\ &\quad + a_2 b_1 (e_2 \times e_1) + a_2 b_2 (e_2 \times e_2) + a_2 b_3 (e_2 \times e_3) \\ &\quad + a_3 b_1 (e_3 \times e_1) + a_3 b_2 (e_3 \times e_2) + a_3 b_3 (e_3 \times e_3) \\ &= a_1 b_2 e_3 - a_1 b_3 e_2 - a_2 b_1 e_3 + a_2 b_3 e_1 + a_3 b_1 e_2 - a_3 b_2 e_1 \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) e_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) e_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) e_3 \\ &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Um die Formel für die Berechnung des Vektorprodukts nicht auswendig lernen zu müssen, verwendet man folgenden Trick, der in der Abbildung 2.6 dargestellt ist: man schreibt die ersten beiden Komponenten der Vektoren unter den Vektoren nochmals hin und streicht die erste Zeile. Dann berechnet man nacheinander übers Kreuz die Produkte der Komponenten aus, wie dargestellt.

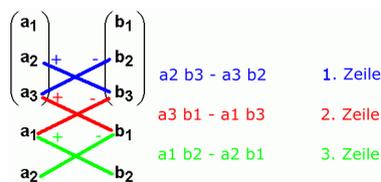


Abbildung 2.6: Berechnung des Vektorprodukts zweier Vektoren  $a$  und  $b$ .

**Beispiel:**

Seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$a \times b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-2) - 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 7 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 21 \\ -6 - 4 \\ 7 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -10 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

### 2.3.4 Anwendungen des Vektorprodukts

#### Fläche eines Dreiecks

Die Fläche eines Dreiecks  $ABC$  ist gegeben durch die Formel

$$A = \frac{1}{2} \|a \times b\|,$$

wobei

$$a = \overrightarrow{AB} \quad \text{und} \quad b = \overrightarrow{AC}.$$

#### Beispiel:

Gegeben Sei das Dreieck durch die Ecken  $A(-2|3|-1)$ ,  $B(-5|7|5)$  und  $C(7|-1|-3)$ . Dann ist

$$a = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die Fläche ist dann

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} -8 - (-24) \\ 54 - 6 \\ 12 - 36 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 16 \\ 48 \\ -24 \end{pmatrix} \right\| \\ &= 4 \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = 4\sqrt{4 + 36 + 9} = 4 \cdot 7 = 28. \end{aligned}$$

#### Anwendungen aus der Physik

Das Vektorprodukt kommt in diversen Gebieten der Physik in verschiedenen Formeln vor. Wir zählen hier einige auf:

1) Das **Drehmoment**  $M$  einer Kraft  $F$  und einem Hebelarm  $r$  ist definiert durch:

$$M = r \times F, \quad r, F, M \in \mathbb{R}^3$$

Der Betrag des Drehmoments ist

$$\|M\| = \|r\| \|F\| \sin(\vartheta),$$

wobei  $\vartheta$  der Winkel zwischen den Vektoren  $r$  und  $F$  ist. Das führt dazu, dass nur der Anteil der Kraft, welche senkrecht auf dem Hebelarm steht, zu einem Drehmoment führt.

2) Der **Drehimpuls**  $L$  einer Masse  $m$ , welche sich am Ort  $r$  im Raum befindet und sich mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, ist gegeben durch

$$L = m(r \times v) = r \times p,$$

wobei  $p = mv$  der Impuls der Masse ist. Man beachte, dass  $r$ ,  $v$ ,  $p$  und  $L$  alle Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  sind, während die Masse  $m$  natürlich ein Skalar ist. Zwischen dem Drehmoment und dem Drehimpuls besteht ein wichtiger Zusammenhang: der Drehimpuls ändert sich nur, wenn ein Drehmoment wirkt, genau so wie sich der Impuls nur ändert, wenn eine Kraft wirkt. Mathematisch geschrieben, lautet das:

$$\frac{dL}{dt} = M.$$

- 3) Ein elektrisch geladenes Teilchen (wie z.B. ein Elektron) der Ladung  $q$ , welches sich mit der Geschwindigkeit  $v$  in einem Magnetfeld  $B^7$  bewegt, erfährt eine Kraft. Diese Kraft heisst **Lorentzkraft** und ist gegeben durch

$$F_L = q(v \times B).$$

Aufgrund der Eigenschaft des Vektorproduktes ist der Vektor  $F_L$  stets senkrecht auf der Geschwindigkeit des Teilchens. Damit wird ist auch der Beschleunigungsvektor senkrecht auf die Geschwindigkeit. Dies führt dazu, dass das Teilchen eine Kreisbahn (oder Spiralbahn) im Magnetfeld einschlägt. Die Lorentzkraft spielt dabei die Rolle der Zentripetalkraft dieser Kreisbahn. Ausserdem kann die Lorentzkraft keine Energie auf das Teilchen übertragen, weil für eine auf die Bewegungsrichtung senkrechte Kraft, wird keine Arbeit verrichtet.

- 4) Die **Energieflussdichte**<sup>8</sup> des elektromagnetischen Feldes wird durch den sogenannten **Poyntingvektor**  $S$  beschrieben. Eine elektromagnetische Welle (wie z.B. Licht oder Radiowellen) besteht aus einem schwingenden elektrischen Feld  $E$  und einem schwingenden magnetischen Feld  $H$ . Sowohl das elektrische Feld  $E$  als auch das Magnetfeld  $H$  sind Vektorfelder und stehen bei einer elektromagnetischen Welle stets senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung. Das Vektorprodukt der beiden Vektoren zeigt dann gerade in die Richtung, in die sich die Welle fortpflanzt. Dies ist dann eben der sogenannte **Poyntingvektor**  $S$  und er ist gegeben durch

$$S = E \times H.$$

Auch bei stationären elektromagnetischen Feldern spielt dieser Poynting-Vektor eine Rolle, wie das Beispiel des Koaxialkabels zeigt (siehe Abb. 2.7). Der Poynting-Vektor im Koaxialkabel

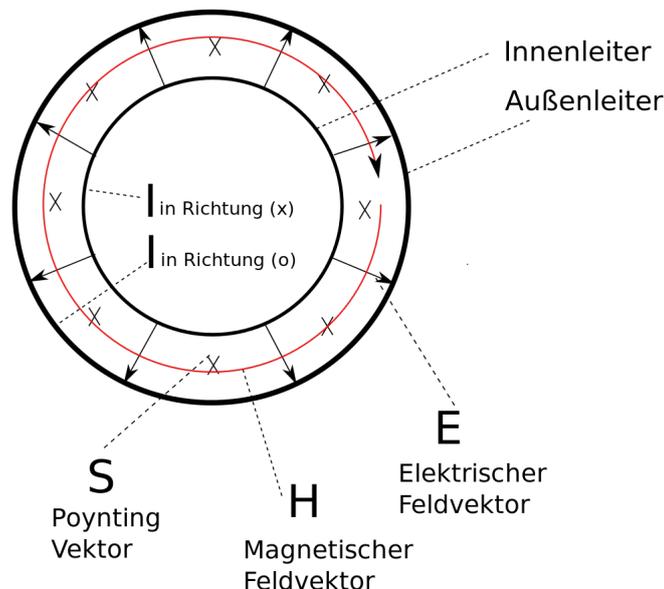


Abbildung 2.7: Poynting-Vektor im Koaxialkabel (Quelle: Wikipedia).

ist nur ungleich null im Innenbereich zwischen Innen- und Aussenleiter. Also, obwohl der elektrische Strom in den beiden Leitern fließt, wird die Energie im Dielektrikum (also im Zwischenbereich zwischen den Leitern) transportiert.

<sup>7</sup>Um genau zu sein, handelt es sich bei  $B$  um die magnetische Flussdichte.

<sup>8</sup>Allgemein gibt die Energieflussdichte an, wieviel Energie pro Zeiteinheit durch eine Fläche fließt. Daher hat die Energieflussdichte die Einheit  $\frac{\text{J}}{\text{s} \cdot \text{m}^2}$  (oder  $\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ). Dabei ist unerheblich, welcher physikalische Prozess für den Energietransport verantwortlich ist. Wenn man bei einer elektromagnetischen Welle von deren Intensität spricht, meint man eigentlich eine Energieflussdichte. Wenn Wärme transportiert wird, spricht man von einer Wärmestromdichte, meint aber physikalisch das Gleiche.

## Volumen eines Spats

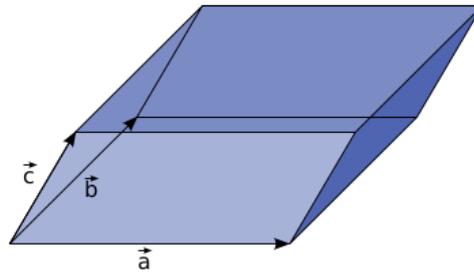


Abbildung 2.8: Ein Spat gebildet mit den Vektoren  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

Ein **Spat**<sup>9</sup> oder **Parallelepiped** ist ein aus sechs Parallelogrammen als Seitenflächen aufgebautes Hexaeder.<sup>10</sup> Der Spat wird von den drei Vektoren

$$a = \overrightarrow{AB}, \quad b = \overrightarrow{AC} \quad \text{und} \quad c = \overrightarrow{AD}$$

aufgespannt. Das Volumen dieses Spats ist

$$V = A \cdot h,$$

wobei  $A$  die Fläche des von  $a$  und  $b$  aufgespannten Parallelogramms ist und  $h$  die Höhe des Spats bildet. Die Fläche  $A$  ist

$$A = \|a \times b\|.$$

Die Höhe  $h$  ist die Orthogonalprojektion des Vektors  $c$  auf das Vektorprodukt  $a \times b$ . Es gilt also

$$h = \|c\| \cdot |\cos(\varphi)|.$$

wobei der  $\varphi$  der Winkel zwischen  $c$  und  $a \times b$  darstellt. Dieser Winkel ist gegeben durch

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle a \times b, c \rangle}{\|c\| \|a \times b\|}.$$

Damit ergibt sich für das Volumen eines Spats die folgende einfache Formel

$$V = |\langle a \times b, c \rangle|$$

### Definition 2.3.4 (Spatprodukt)

Seien  $a$ ,  $b$  und  $c$  drei beliebige Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ . Dann definiert

$$\langle a \times b, c \rangle$$

das **Spatprodukt** der Vektoren  $a$ ,  $b$  und  $c$ .

#### Bemerkung:

Das Spatprodukt ist **zyklisch**, d.h. es gilt

$$\langle a \times b, c \rangle = \langle c \times a, b \rangle = \langle b \times c, a \rangle.$$

Natürlich gilt auch aufgrund der Kommutativität des Skalarprodukts und der Antikommutativität des Vektorprodukts

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c \rangle &= \langle c, a \times b \rangle \\ \langle a \times b, c \rangle &= -\langle b \times a, c \rangle \end{aligned}$$

<sup>9</sup>Das Wort "Spat" stammt vom Mineral Kalkspat (Calcit  $\text{CaCO}_3$ ) her. Die Kristalle von Kalkspat haben die Form eines Spats.

<sup>10</sup>Hexaeder=Sechsfächer. Der Quader und natürlich auch der Würfel sind spezielle Hexaeder.

## Volumen des Tetraeders

Ein Tetraeder<sup>11</sup> ist ein Körper, dessen Seitenflächen aus vier beliebigen Dreiecken gebildet werden. Das Tetraeder wird von drei Vektoren

$$a = \overrightarrow{AB}, \quad b = \overrightarrow{AC} \quad \text{und} \quad c = \overrightarrow{AD}$$

aufgespannt. Das Volumen eines Tetraeders ist

$$V = \frac{1}{3} A \cdot h,$$

wobei  $A$  die Fläche des von  $a$  und  $b$  aufgespannten Dreiecks ist und  $h$  die Höhe des Tetraeders bildet. Die Fläche  $A$  ist

$$A = \frac{1}{2} \|a \times b\|.$$

Die Höhe  $h$  ist wie für den Spat gegeben durch

$$h = \frac{\langle a \times b, c \rangle}{\|a \times b\|}.$$

Damit ergibt sich für das Volumen des Tetraeders die folgende Formel

$$V = \frac{1}{6} |\langle a \times b, c \rangle|$$

---

<sup>11</sup>Das Wort Tetraeder bedeutet Vierflächer. Das Tetraeder ist ein Körper aus vier Dreiecken als Seitenflächen. Im speziellen Fall, in welchem das Tetraeder aus vier gleichseitigen Dreiecken besteht, ist das **regelmässige** Tetraeder und dieses ist einer der fünf platonischen Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder).

# Kapitel 3

## Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Unfortunately, no one can be told what the Matrix is. You have to see it for yourself.

---

Morpheus

### 3.1 Matrizenrechnung

#### 3.1.1 $m \times n$ -Matrizen

##### Definition 3.1.1 ( $m \times n$ -Matrix)

Unter einer  $m \times n$ -**Matrix** versteht man ein rechteckiges Zahlenschema von reellen (komplexen) Zahlen  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ ) ( $a_{ij} \in \mathbb{K}$ ) mit  $m$  waagrecht angeordneten Zeilen und  $n$  senkrecht angeordneten Spalten:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Zahlen  $a_{ij}$  heissen **Matrixelemente** oder **Matrixeinträge**.  $i = 1, \dots, m$  ist der Zeilenindex und  $j = 1, \dots, n$  ist der Spaltenindex.

Die Menge aller reellen (oder komplexen)  $m \times n$ -Matrizen bezeichnen wir mit:

$$\mathbb{K}^{m \times n} := \left\{ A \mid A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}, a_{ij} \in \mathbb{K} \right\}.$$

Als spezielle Matrizen definieren wir noch die **Nullmatrix**

$$0 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

die sogenannte Einheitsmatrix

$$\mathbb{1}_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die Matrix  $-A$

$$-A := \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Beispiele:**

i)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & \pi & 5 & 0 \\ 2 & -3 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$$

ist eine reelle  $2 \times 4$ -Matrix. Die Matrix  $A$  hat zwei Zeilen und vier Spalten. Matrixelemente sind z.B.  $a_{23} = \sqrt{2}$  oder  $a_{14} = 0$ .

ii)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

ist eine komplexe  $2 \times 2$ -Matrix.

iii) Die Einheitsmatrix in drei Dimensionen ist

$$\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv)

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \cong \mathbb{R}^3$$

ist eine  $3 \times 1$ -Matrix oder ein Spaltenvektor.

v)

$$u = (4 \quad -2 \quad -7 \quad 5) \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$$

ist eine  $1 \times 4$ -Matrix oder ein Zeilenvektor.

vi) Spaltenvektoren kommen sehr häufig in der Physik vor, z.B. ist der Beschleunigungsvektor der Erdbeschleunigung

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

nichts anderes als ein Spaltenvektor mit drei Einträgen.

### 3.1.2 Der Vektorraum $\mathbb{K}^{m \times n}$

Genau wie Vektoren kann man auch Matrizen addieren und mit Skalaren multiplizieren. Diese beiden Operationen sind für Matrizen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} A + B &:= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es wird also komponentenweise addiert, wofür  $A$  und  $B$  beide  $m \times n$ -Matrizen sein müssen. Die Skalarmultiplikation ist definiert durch:

$$\lambda \cdot A := \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix},$$

wobei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Die so für die Matrizen definierten Rechenoperationen Addition und Skalarmultiplikation erfüllen ebenfalls die im Abschnitt 2.1.2 behandelten Vektorraumaxiome.

- Die Addition erfüllt die Bedingungen:
  - i)  $(A + B) + C = A + (B + C)$ ,  $\forall A, B, C \in \mathbb{K}^{m \times n}$
  - ii)  $A + 0 = A$ ,  $\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
  - iii)  $A + (-A) = 0$ ,  $\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
  - iv)  $A + B = B + A$ ,  $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$
- Die Skalarmultiplikation erfüllt:
  - v)  $(\lambda\mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$   $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
  - vi)  $1 \cdot A = A$   $\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
- und es gelten die Distributivgesetze:
  - vii)  $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$   $\forall \lambda \in \mathbb{K}, A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ,
  - viii)  $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$   $\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n}, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Das heisst auch die Menge der reellen (oder komplexen) Matrizen  $\mathbb{K}^{m \times n}$  erfüllt die acht Vektorraumaxiome und ist damit ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

## 3.2 Matrixprodukte

### 3.2.1 Produkt Matrix mal Vektor

#### Definition 3.2.1

Das Produkt  $y = A \cdot x$  einer Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  mit einem Vektor  $x \in \mathbb{K}^n$  ist definiert durch

$$y = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}}_{y \in \mathbb{K}^m} := \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{K}^{m \times n}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{x \in \mathbb{K}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{A \cdot x \in \mathbb{K}^m}$$

Die  $i$ -te Komponente des Vektors  $A \cdot x$  ist das Skalarprodukt der  $i$ -ten Zeile von  $A$  mit dem Vektor  $x$ . Mit dem Summenzeichen kann das Produkt geschrieben werden als:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, \dots, m.$$

#### Bemerkungen:

- i) Das Produkt einer Matrix  $A$  mit einem Vektor  $x$  ist nur definiert, wenn die Matrix  $A$  gleich viele Spalten hat, wie der Vektor  $x$  Einträge. Die Anzahl Zeilen von  $A$  spielt keine Rolle. Der Vektor  $y = Ax$  hat aber gleich viele Einträge, wie die Matrix  $A$  Zeilen hat.
- ii) In der linearen Algebra sagt man auch, dass man die Matrix  $A$  auf den Vektor  $x$  "anwendet" oder dass die Matrix  $A$  den Vektor  $x$  auf den Vektor  $A \cdot x$  "abbildet". Wie wir im Kapitel 6 sehen werden, handelt es sich nämlich bei Matrizen um die mathematische Beschreibung sogenannter **linearer Abbildungen**. Zu den linearen Abbildungen gehören zum Beispiel Drehungen, Streckungen und Projektionen. Diese Abbildungen können durch Matrizen dargestellt werden.

### 3.2.2 Produkt zweier Matrizen

Wenn wir schon bei den Matrizen sind, besprechen wir gleich auch das Produkt von zwei Matrizen. Das Produkt zweier Matrizen ist vom Prinzip her genau das Gleiche wie die Anwendung einer Matrix auf einen Vektor. Sehen wir uns dies anhand eines Beispiels an:

**Beispiel:**

Seien  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$  und  $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen das Produkt dieser beiden Matrizen

$$C = B \cdot A.$$

Dieses Produkt erhält man, indem man für jede Zeile in  $B$  das Skalarprodukt mit jeder Spalte in  $A$  bildet. Also,

$$\begin{aligned} C = B \cdot A &= \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-5) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 4 & (-5) \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 & (-5) \cdot 3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) & (-5) \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 7 \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) & 3 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 7 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 & 10 \\ 15 & 0 & 15 & 18 \\ -3 & -2 & 7 & -8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Produkt von zwei Matrizen ist nur definiert, wenn die Matrix die links im Produkt steht (hier die Matrix  $B$ ) gleich viele Spalten hat, wie die Matrix, die rechts im Produkt steht (hier die Matrix  $A$ ), Zeilen hat. Sonst geht es beim Berechnen ja gar nicht auf. Es ist also in diesem Beispiel nicht möglich das Produkt  $A \cdot B$  auszurechnen.

In allgemeiner Schreibweise definiert man das Matrizenprodukt wie folgt: seien  $A \in \mathbb{K}^{l \times n}$  eine  $l \times n$ -Matrix und  $B \in \mathbb{K}^{m \times l}$  eine  $m \times l$ -Matrix. Dann ist das Matrixprodukt  $B \cdot A$  gegeben durch die  $m \times n$ -Matrix

$$C = (c_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

wobei die Komponenten von  $C$  gegeben sind durch:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l b_{ik} a_{kj}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Das Matrixelement  $c_{ij}$  ergibt sich also aus dem Skalarprodukt der  $i$ -ten Zeile von  $B$  mit der  $j$ -ten Spalte von  $A$ .

**Satz 3.2.2**

Das Matrixprodukt ist assoziativ, d.h. für drei Matrizen  $A, B, C$  gilt:

$$C(BA) = (CB)A,$$

sofern die entsprechenden Matrixprodukte definiert sind.

### 3.3 Lineare Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt lernen wir lineare Gleichungssysteme kennen. Wir werden sehen, wie ihre Lösungsmenge aussehen kann und wie man sie berechnet. Weiter lernen wir einen Algorithmus (Gauss-Algorithmus) kennen, um allgemeine lineare Gleichungssysteme lösen zu können.

### 3.3.1 Beispiele von linearen Gleichungssystemen

Besprechen wir der Einfachheit halber, drei einfache Beispiele von linearen Gleichungssystem mit nur zwei Unbekannten (Variablen):

1.) Ein lineares Gleichungssystem sei gegeben durch:

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &= 1, \\x_1 + x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Wie löst man dieses Gleichungssystem? Es gibt mehrere Möglichkeiten. Eine Möglichkeit ist, wie folgt vorzugehen:

- Wir lösen die zweite Gleichung nach  $x_2$  auf:  $x_2 = -x_1$ .
- Das Resultat setzen wir in die erste Gleichung ein:  $2x_1 - 3x_1 = 1$ .
- Schliesslich lösen wir die erste Gleichung nach  $x_1$  auf:  $x_1 = -1$ .
- Es bleibt noch, mit dem jetzt bekannten  $x_1$  das  $x_2$  auszurechnen:  $x_2 = -x_1 = -(-1) = 1$ .

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist also  $(x_1, x_2) = (-1, 1)$ . Diese Lösung können wir als Vektor in der reellen Zahlenebene  $\mathbb{R}^2$  interpretieren. Schreibt man nämlich diese Lösung als

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

so versteht man darunter einen Vektor (oder einen Punkt) im  $\mathbb{R}^2$ . Eine zweite Möglichkeit, um das Gleichungssystem zu lösen, ist es die beiden Gleichung geschickt zu addieren, sodass eine Variable rausfällt:

- Wir addieren zur zweiten Gleichung  $-\frac{1}{2}$  mal die erste Gleichung und mit der erhaltenen Gleichung ersetzen wir die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &= 1, \\0x_1 - \frac{1}{2}x_2 &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

- In der zweiten Gleichung ist  $x_1$  verschwunden und wir können nach  $x_2$  auflösen und erhalten  $x_2 = 1$ .
- Nun müssen wir in der ersten Gleichung  $x_2$  einsetzen und daraus  $x_1$  bestimmen (Rückwärtseinsetzen):

$$2x_1 + 3x_2 = 2x_1 + 3 \cdot 1 = 2x_1 + 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1.$$

Die 2. Lösungsvariante erscheint hier auf den ersten Blick etwas umständlicher. Bei komplizierteren grösseren linearen Gleichungssystemen mit vielen Unbekannten und Gleichungen ist die 2. Methode jedoch der ersten überlegen.

2.) Als zweites Beispiel betrachten wir ein leicht abgewandeltes lineares Gleichungssystem, nämlich

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ \frac{2}{3}x_1 + x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Wir benutzen als Lösungsverfahren die 2. Methode des vorhergehenden Beispiels:

- Wir addieren zur 2. Gleichung  $-\frac{1}{3}$  mal die erste Gleichung und erhalten somit:

$$\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 &= 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 &= -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Wie erwartet sind wir dadurch  $x_1$  in der 2. Gleichung losgeworden. Doch was ist passiert? Wir bekommen eine 2. Gleichung, die unlösbar ist. Die linke Seite der Gleichung ist nämlich 0, egal was wir für  $x_1$  und  $x_2$  einsetzen. Die rechte Seite der 2. Gleichung ist aber  $-\frac{1}{3}$ . Das ist ein Widerspruch oder mit anderen Worten, dieses lineare Gleichungssystem hat *keine* Lösung.



wobei die reellen (komplexen) Zahlen  $a_{ij}, b_i \in \mathbb{K}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$  als **Koeffizienten** bezeichnet werden. Mit Hilfe des Produktes von Matrizen mit Vektoren kann das lineare Gleichungssystem in Matrixschreibweise dargestellt werden. Sei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  die  $m \times n$ -Matrix

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit den Koeffizienten als Matrixeinträgen und  $b \in \mathbb{K}^m$  bezeichne den Vektor

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

der aus der rechten Seite des Gleichungssystem gebildet wird. Dann lässt sich das lineare Gleichungssystem schreiben als:

$$A \cdot x = b.$$

### Beispiel:

Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_4 &= 0 \\ x_1 - 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 &= 8 \\ 3x_2 + 7x_4 &= -2 \end{aligned}$$

hat  $m = 3$  Gleichungen und  $n = 4$  Variablen. In kompakter Schreibweise lautet es

$$Ax = b, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

mit der  $3 \times 4$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

und dem Vektor

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

### Nicht-Beispiele:

Zur Illustration seien hier noch einige Beispiele aufgeführt, bei denen es sich *nicht* um lineare Gleichungssystem handelt:

1.)

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1^2 + x_2^2 &= 1 \end{aligned}$$

ist kein lineares Gleichungssystem, da  $x_1^2$  und  $x_2^2$  nicht-lineare Terme sind.

2.) Ebenso ist

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_1x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

ein nicht-lineares Gleichungssystem, aufgrund des darin vorkommenden Produktes  $x_1x_2$ .

3.) Schliesslich ist auch

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_1 - e^{x_2} &= -2 \end{aligned}$$

nicht-linear, da die Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$  eine nicht-lineare Funktion ist.

### 3.3.3 Gauss-Algorithmus

In diesem Abschnitt lernen wir mit dem sogenannten **Gauss-Algorithmus** ein systematisches Lösungsverfahren kennen, um jegliche lineare Gleichungssysteme zu lösen, zumindest in der Theorie. In der Praxis, in der die linearen Gleichungssysteme riesengross werden können, muss man sich etwas noch Klügeres einfallen lassen, weil man Probleme mit der Rechenzeit und dem Speicherplatz bekommt.<sup>2</sup>

Um die Idee hinter dem Gauss-Algorithmus zu begreifen, starten wir wieder einmal mit einem Beispiel:

#### Beispiel:

Ein lineares Gleichungssystem sei gegeben durch:

$$\begin{aligned}2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 8 \\x_2 + x_3 &= -4 \\-2x_3 &= 10\end{aligned}$$

Offensichtlich ist dieses lineare Gleichungssystem bereits in einer Form, in der es praktisch schon gelöst ist. Um dies noch klarer zu veranschaulichen, schreiben wir es in folgende Form um:

$$\begin{array}{ccc|c}x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 6 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 10\end{array}$$

Oben haben wir die drei Variablen hingeschrieben, links steht die Matrix  $A$  des linearen Gleichungssystems und rechts des senkrechten Strichs der Vektor  $b$ . Nun sehen wir, dass wir aus der 3. Zeile  $x_3$  ausrechnen können. So geschehen, können wir aus der 2. Zeile dann  $x_2$  berechnen und schliesslich aus der 1. Zeile das  $x_1$ . Das nennt man das sogenannte **Rückwärtseinsetzen**. Wir finden also  $x_3 = -5$  aus der 3. Zeile. Aus der 2. Zeile folgt:

$$x_2 + x_3 = -4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -4 - x_3 = -4 - (-5) = 1$$

und aus der 1. Zeile

$$\begin{aligned}2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 8 \\ \Rightarrow 2x_1 &= 8 - 6x_2 - 2x_3 = 8 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot (-5) = 12 \\ \Rightarrow x_1 &= 6.\end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems entspricht geometrisch einem Punkt im  $\mathbb{R}^3$ , als Vektor geschrieben:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Es ist also offensichtlich so, dass wenn ein lineares Gleichungssystem in Dreiecksform (genauer: in Zeilenstufenform) vorliegt, wir dieses durch Rückwärtseinsetzen lösen können. Wenn es uns gelingt, ein beliebiges lineares Gleichungssystem in diese Zeilenstufenform zu bringen, ohne dabei seine Lösungsmenge zu ändern, dann haben wir unser begehrtes Lösungsverfahren gefunden. Und genau das ist die Idee des Gauss-Algorithmus.

Wir betrachten das allgemeine lineare Gleichungssystem  $A \cdot x = b$  mit  $m$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten, wobei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  die  $m \times n$ -Matrix der Koeffizienten und  $b \in \mathbb{K}^m$  die rechte Seite des linearen Gleichungssystems fest vorgegeben sind. Das Gauss-Eliminationsverfahren beruht auf folgenden drei erlaubten Zeilenoperationen:

- i) Zeilen (Gleichungen) dürfen vertauscht werden.
- ii) Zeilen (Gleichungen) dürfen mit einem Skalar  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  multipliziert werden.
- iii) Zeilen (Gleichungen) dürfen zueinander addiert werden.

#### Satz 3.3.1

Die drei erwähnten Zeilenoperationen ändern die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht.

<sup>2</sup>Ein ganzes Teilgebiet der numerischen Mathematik (Numerik) beschäftigt sich ausschliesslich mit Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme.

Wir können also an einem linearen Gleichungssystem alle von diesen drei Zeilenoperationen durchführen, so oft wir wollen und in jeglichen Kombinationen – das lineare Gleichungssystem das dabei rauskommt, wird immer noch die selbe Lösungsmenge haben wie das Ursprüngliche. Das Ziel des Gauss-Algorithmus ist es jedoch, dass wir die Zeilenoperation so geschickt wählen, dass wir am Ende ein lineares Gleichungssystem in der Zeilenstufenform bekommen.

Man beginnt, indem man für das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  die erweiterte Koeffizientenmatrix aufstellt, die folgende Gestalt hat:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \\ \hline a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}$$

Dann ist das Vorgehen beim Gauss-Eliminationsverfahren wie folgt:

i) 1. Eliminationsschritt:

- Überprüfe, ob das Matrixelement  $a_{11} = 0$ . Wenn ja, vertausche die 1. Zeile mit einer Zeile  $k$ , für die  $a_{k1} \neq 0$ . Es gibt immer eine solche Zeile, denn sonst ist das lineare Gleichungssystem gar nicht von  $x_1$  abhängig und somit dürfte man diese Variable aus dem Gleichungssystem streichen.
- Es ist nun  $a_{11} \neq 0$ . Das ist das 1. **Pivotelement**<sup>3</sup> und wir machen ein Kästchen um diese Zahl. Addiere  $-\frac{a_{j1}}{a_{11}}$  mal die 1. Gleichung zu den Gleichungen  $j = 2, \dots, m$ . Nach diesem ersten Eliminationsschritt hat man aus den Gleichungen  $j = 2, \dots, m$  die Variable  $x_1$  eliminiert. Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat dann folgende Gestalt:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \\ \hline \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \cdots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}$$

Unter dem 1. Pivotelement  $a_{11}$  stehen ausschliesslich Nullen.

ii) 2. Eliminationsschritt:

- Falls  $\tilde{a}_{22} = 0$ , vertausche die 2. Zeile mit einer der Zeilen  $k = 3, \dots, m$  für die  $\tilde{a}_{k2} \neq 0$ . Falls alle  $\tilde{a}_{k2} = 0 \forall k = 3, \dots, m$ , geht man zum nächsten Eliminationsschritt über.
- Falls  $\tilde{a}_{22} \neq 0$  wird es das 2. Pivotelement. Dann addiere  $-\frac{\tilde{a}_{j2}}{\tilde{a}_{22}}$  zu den Gleichungen  $j = 3, \dots, m$ . Die erweiterte Koeffizientenmatrix sieht nach dem 2. Eliminationsschritt wie folgt aus:

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \\ \hline \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \boxed{\tilde{a}_{22}} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \bar{a}_{33} & \cdots & \bar{a}_{3n} & \bar{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \bar{a}_{m3} & \cdots & \bar{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}$$

iii) Dieser Prozess wird nun solange fortgeführt, bis man entweder bei der letzten Zeile angelangt ist oder die Koeffizientenmatrix ab einer bestimmte Zeile nur noch Zeilen aufweist, die ausschliesslich Nullen enthalten.

Das Endschema des Gauss-Eliminationsverfahrens ist die sogenannte **Zeilenstufenform**, die folgender-

<sup>3</sup>Das Pivot ist beim Fischen der Schwimmer, der an der Wasseroberfläche wackelt, wenn die Fische beißen.

massen aussieht:

$x_1$	$x_2$	$\dots$	$\dots$	$x_n$		
$\boxed{*}$	$*$	$\dots$	$*$	$\dots$	$*$	$c_1$
$0$	$0$	$\dots$	$0$	$\boxed{*}$	$*$	$c_2$
$0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$0$	$\boxed{*}$	$c_3$
$0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$0$	$\boxed{*}$	$c_4$
$0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$0$	$\boxed{*}$	$\vdots$
$\vdots$					$\ddots$	$\vdots$
$0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$0$	$\boxed{*}$	$\vdots$
$0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$0$	$\boxed{*}$	$c_r$
$0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$0$	$0$	$c_{r+1}$
$\vdots$					$\vdots$	$\vdots$
$0$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$0$	$0$	$c_m$

Das Zeichen \* steht hier für irgendeine Zahl, die aber nicht null sein kann. Die Zeilen unterhalb des letzten Pivotelements (unterhalb der  $r$ -ten Zeile), enthalten links nur noch Nullen. Diese Zeilen nennt man **Nullzeilen**.

**Beispiele:**

1.) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Wir starten mit dem Schema

$x_1$	$x_2$	$x_3$		
1	1	1		6
2	-1	2		6
3	-2	1		2

i) 1. Eliminationsschritt: das 1. Pivotelement ist  $a_{11} = 1$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$		
$\boxed{1}$	1	1		6
2	-1	2		6
3	-2	1		2

- Addiere zur 2. Zeile  $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -2$  mal die 1. Zeile:

$x_1$	$x_2$	$x_3$		
$\boxed{1}$	1	1		6
0	-3	0		-6
3	-2	1		2

Man kann die 2. Zeile noch durch  $-3$  dividieren, wenn man möchte:

$x_1$	$x_2$	$x_3$		
$\boxed{1}$	1	1		6
0	1	0		2
3	-2	1		2

- Addiere zur 3. Zeile  $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -3$  mal die 1. Zeile:

$x_1$	$x_2$	$x_3$		
$\boxed{1}$	1	1		6
0	1	0		2
0	-5	-2		-16

Damit haben unter dem 1. Pivotelement lauter Nullen erzeugt, der 1. Eliminationsschritt ist durchgeführt.

ii) 2. Eliminationsschritt: das 2. Pivotelement ist  $a_{22} = 1$ :

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -16 \end{array}$$

- Addiere zur 3. Zeile  $-\frac{a_{32}}{a_{22}} = 5$  mal die 2. Zeile:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}$$

Wir dividieren die 3. Zeile noch durch  $-2$ :

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & 1 & 1 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}$$

Nun hat es auch unter dem 2. Pivotelement nur noch Nullen, der 2. Eliminationsschritt ist beendet.

Damit liegt das lineare Gleichungssystem in der Zeilenstufenform vor. Die Unbekannten ergeben sich nun ganz leicht durch das Rückwärtseinsetzen startend mit der 3. Zeile. Diese liefert  $x_3 = 3$  Dann ergibt sich aus der 2. Zeile sofort  $x_2 = 2$  und schliesslich bedeutet die 1. Zeile, dass

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 6 - x_2 - x_3 = 6 - 2 - 3 = 1.$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystem entspricht geometrisch einem Punkt im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  und kann als Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden.

2.) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Wir starten mit dem Schema

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{array}$$

i) 1. Eliminationsschritt: das 1. Pivotelement ist  $a_{11} = 1$ :

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{array}$$

- Addiere zur 2. Zeile  $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -2$  mal die 1. Zeile:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 2 & 8 & 2 & 2 \end{array}$$

- Addiere zur 3. Zeile  $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -2$  mal die 1. Zeile:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 10 & -2 & -10 \end{array}$$

Damit haben unter dem 1. Pivotelement lauter Nullen erzeugt, der 1. Eliminationsschritt ist durchgeführt.

- ii) 2. Eliminationsschritt: das 2. Pivotelement ist  $a_{22} = 5$ :

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{5} & -1 & -7 \\ 0 & 10 & -2 & -10 \end{array}$$

- Addiere zur 3. Zeile  $-\frac{a_{32}}{a_{22}} = -2$  mal die 2. Zeile:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{5} & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}$$

Nun hat es auch unter dem 2. Pivotelement nur noch Nullen, der 2. Eliminationsschritt ist beendet.

Wir sehen, dass wir hier in der Zeilenstufenform eine Nullzeile erhalten haben. Was es damit auf sich hat, wollen wir gleich besprechen. Die letzte Zeile bedeutet ja, dass

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 4.$$

Diese Gleichung enthält aber einen Widerspruch, denn ihre linke Seite ist immer gleich 0, egal was man für  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  wählt. Die rechte Seite jedoch ist 4. Das bedeutet, dass dieses lineare Gleichungssystem keine Lösung hat.

- 3.) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Wir starten mit dem Schema

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & -2 \end{array}$$

- i) 1. Eliminationsschritt: das 1. Pivotelement ist die  $a_{11} = 1$ :

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 2 & -2 \end{array}$$

- Addiere zur 2. Zeile  $-\frac{a_{21}}{a_{11}} = -2$  mal die 1. Zeile:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 2 & 8 & 2 & -2 \end{array}$$

- Addiere zur 3. Zeile  $-\frac{a_{31}}{a_{11}} = -2$  mal die 1. Zeile:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & -1 & -7 \\ 0 & 10 & -2 & -14 \end{array}$$

Damit haben unter dem 1. Pivotelement lauter Nullen erzeugt, der 1. Eliminationsschritt ist durchgeführt.

- ii) 2. Eliminationsschritt: das 2. Pivotelement ist  $a_{22} = 5$ :

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{5} & -1 & -7 \\ 0 & 10 & -2 & -14 \end{array}$$

- Addiere zur 3. Zeile  $-\frac{a_{32}}{a_{22}} = -2$  mal die 2. Zeile:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{5} & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Nun hat es auch unter dem 2. Pivotelement nur noch Nullen, der 2. Eliminationsschritt ist beendet.

Wir sehen, dass wir wieder die Nullzeile erhalten haben, aber diesmal steht auch im Vektor  $c$  rechts eine 0. Diese Nullzeile bedeutet nun, dass

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0.$$

Diese Gleichung ist jedoch für beliebige  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  erfüllt. Das heisst, das lineare Gleichungssystem in diesem Beispiel hat, obwohl mit drei Gleichungen aufgestellt, eigentlich nur zwei unabhängige Gleichungen. Daher haben wir die Freiheit, eine Variable beliebig festzulegen. Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen. Man wählt dafür konventionellerweise immer die Variable (es können auch mehrere sein), in deren Spalte sich kein Pivotelement befindet. In diesem Beispiel ist das die Variable  $x_3$ . Wir setzen also  $x_3 = t$ , wobei  $t \in \mathbb{R}$  eine beliebige reelle Zahl sein darf. Die anderen beiden Unbekannten ergeben sich wie gewohnt durch Rückwärtseinsetzen. Die 2. Zeile ergibt

$$5x_2 - x_3 = -7 \quad \Rightarrow \quad 5x_2 = -7 + x_3 = -7 + t \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}t.$$

Aus der 1. Zeile schliesslich erhalten wir:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\ \Rightarrow x_1 &= 6 + x_2 - 2x_3 = 6 - \frac{7}{5} + \frac{1}{5}t - 2t = \frac{23}{5} - \frac{9}{5}t. \end{aligned}$$

Geometrisch bekommen wir als Lösung des linearen Gleichungssystems eine Gerade im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$ . Als Vektor geschrieben lautet die Lösung

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{5} - \frac{9}{5}t \\ -\frac{7}{5} + \frac{1}{5}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{9}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

In diesen drei Beispielen haben wir also dreimal den Gauss-Algorithmus durchgeführt, um die Gleichungssysteme auf Stufenform zu bringen. Beim anschliessenden Hinschreiben der Lösungsmenge haben wir wieder festgestellt, dass die linearen Gleichungssysteme auch genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen haben können. Die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen besprechen wir genauer im folgenden Abschnitt.

### 3.3.4 Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen

Wir gehen davon aus, dass das Gleichungssystem bereits als Endschema in Zeilenstufenform vorliegt. Bevor wir besprechen, wie man daraus die Lösungsmenge bestimmt, benötigen wir folgende Eigenschaften der Zeilenstufenform einer Matrix:

#### Definition 3.3.2 (Rang)

Sei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  die Matrix auf der linken Seite eines linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ . Die Anzahl der Pivotelemente in der Zeilenstufenform dieses linearen Gleichungssystems heißt **Rang des linearen Gleichungssystems** oder **Rang der Matrix**  $A$  und wird mit  $\text{rang}(A)$  bezeichnet.

#### Bemerkung:

Die rechte Seite des linearen Gleichungssystems, also der Vektor  $b \in \mathbb{K}^m$  ist für den Rang nicht ausschlaggebend.

#### Satz 3.3.3

Sei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  eine  $m \times n$ -Matrix mit  $\text{rang}(A) = r$ . Dann gilt:

- i)  $r$  ist gleich der Anzahl Zeilen in der Zeilenstufenform, die nicht Nullzeilen sind.
- ii)  $0 \leq r \leq \min(m, n)$
- iii) Die Zeilenstufenform hat  $n - r$  Spalten ohne Pivotelemente. Das lineare Gleichungssystem hat  $n - r$  freie Variablen.

*Beweis.* i) Links vom Pivotelement in einer Zeile hat es nur Nullen, d.h. wenn eine Zeile kein Pivotelement hat, ist sie eine Nullzeile. Folglich hat jede Zeile, die keine Nullzeile ist, ein Pivotelement. Damit ist der Rang gleich der Anzahl Zeilen, die nicht Nullzeilen sind.

ii) klar.

iii) Insgesamt sind es  $n$  Spalten und  $r$  davon enthalten ein Pivotelement. Folglich gibt es  $n - r$  Spalten *ohne* Pivotelement.  $\square$

Das Bestimmen der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems besprechen wir anhand der folgenden Schritt für Schritt Anleitung und behandeln danach zu jedem möglichen Fall ein Beispiel.

#### Vorgehen:

Zur Bestimmung der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems, führt man folgende Schritte durch:

i) Bestimme den Rang des Gleichungssystem  $r := \text{rang}(A)$ .

ii) **Frage:** Gibt es Nullzeilen?

1) nein  $\Leftrightarrow r = m$ . Das lineare Gleichungssystem hat (mindestens) eine Lösung.

**Frage:**  $n - r = 0$ ?

a) ja  $\Leftrightarrow r = n = m$ . Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung. Das Gleichungssystem hatte von Anfang an gleich viele Gleichungen und Variablen.

b) nein  $\Leftrightarrow m = r < n$ . Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen mit  $n - r$  freien Variablen.  $n - r$  ist auch die Dimension des Lösungsraums. Das Gleichungssystem hatte mehr Variablen als Gleichungen.

2) ja  $\Leftrightarrow 0 \leq r < m$ .

**Frage:** Ist mindestens einer der Werte  $c_{r+1}, \dots, c_m$  ungleich Null?

a) ja  $\Leftrightarrow$  das Gleichungssystem hat keine Lösung. Die Nullzeile mit einem  $c_i \neq 0$  zeigt einen Widerspruch zwischen den Gleichungen.

b) nein  $\Leftrightarrow$  das Gleichungssystem hat (mindestens) eine Lösung.

**Frage:**  $n - r = 0$ ?

I) ja  $\Leftrightarrow r = n < m$ . Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung. In diesem Fall hatte das Gleichungssystem zwar mehr Gleichungen als Variablen. Die Nullzeilen besagen aber, dass  $m - n$  Gleichungen "überflüssig" sind.

II) nein  $\Leftrightarrow r < m \leq n$ . Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen mit  $n - r$  freien Variablen.  $n - r$  ist auch die Dimension des Lösungsraums. In diesem Fall hatte das Gleichungssystem anfangs gleich viele oder weniger Gleichungen als Variablen.

- iii) Die Lösungsmenge - falls diese nicht-leer ist - bestimmt man durch Rückwärtseinsetzen beginnend mit der Variablen des untersten Pivotelements.

### Beispiele:

1)

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{2} & -1 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{-3} & 8 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}$$

- i) Der Rang ist  $r = 3$ , denn wir haben drei Pivotelemente.  
 ii) Wir haben keine Nullzeile, es ist  $r = m = 3$ . Das lineare Gleichungssystem hat also (mindestens) eine Lösung.  
 iii) Die Anzahl der Variablen ist ebenfalls  $n = 3$ , also  $n - r = 0$ . Es gilt  $n = m = r = 3$ . Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

Dieses Beispiel entspricht also dem Fall 1)a). Dies ist der wohl geläufigste Fall. Die Lösung bestimmt man durch das Rückwärtseinsetzen. Wir bekommen aus der 3. Zeile

$$x_3 = 1,$$

aus der 2. Zeile

$$\begin{aligned} -3x_2 + 8x_3 &= -1 \\ \Rightarrow -3x_2 &= -1 - 8x_3 = -1 - 8 \cdot 1 = -9 \\ &\Rightarrow x_2 = 3. \end{aligned}$$

Schliesslich aus der 1. Zeile ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\ \Rightarrow 2x_1 &= 5 + x_2 - 3x_3 = 5 + 3 - 3 \cdot 1 = 5 \\ &\Rightarrow x_1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Dies entspricht geometrisch einem Punkt im  $\mathbb{R}^3$ . Man kann die Lösung auch als Vektor schreiben nämlich

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2)

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline \boxed{2} & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -3 \end{array}$$

- i) Der Rang ist  $r = 3$ , denn wir haben drei Pivotelemente.  
 ii) Wir haben keine Nullzeile, es ist  $r = m = 3$ . Das lineare Gleichungssystem hat also (mindestens) eine Lösung.  
 iii) Die Anzahl der Variablen ist  $n = 4$ , also  $n - r = 1 > 0$ . Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen mit einer freien Variablen.

Dieses Beispiel entspricht also dem Fall 1)b). Als freie Variable wählen wir die Variable in der Spalte ohne Pivotelement. Wir setzen also  $x_2 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Die restlichen Unbekannten ergeben sich durch Rückwärtseinsetzen startend mit der 4. Zeile. Aus dieser folgt  $x_4 = -3$ . Die 3. Zeile liefert

$$2x_3 + 3x_4 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2x_3 = 1 - 3x_4 = 1 - 3 \cdot (-3) = 10 \quad \Rightarrow \quad x_3 = 5.$$

Schliesslich ergibt sich aus der 1. Zeile

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0 \\ \Rightarrow 2x_1 = x_2 - 3x_3 + x_4 = t - 3 \cdot 5 - 3 = t - 18 \\ &\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}t - 9. \end{aligned}$$

Als Vektor geschrieben ist die Lösung

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - 9 \\ t \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Es handelt sich bei dieser Lösung geometrisch um eine Gerade im vierdimensionalen  $\mathbb{R}^4$ .

3)

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & 3 & 5 \\ 0 & \boxed{3} & -8 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

- i) Der Rang ist  $r = 3$ , denn wir haben drei Pivotelemente.
- ii) Wir haben zwei Nullzeile, es ist  $r = 3 < m = 5$ . Ob das lineare Gleichungssystem lösbar ist, hängt nun vom Vektor auf der rechten Seite ab, hier konkret vom Wert des Parameters  $a$ . Ist  $a \neq 0$  hat das lineare Gleichungssystem *keine* Lösung. Dies entspricht dem Fall 2)a) und wir haben nichts weiter zu tun. Ist jedoch  $a = 0$  bedeutet dies, dass das lineare Gleichungssystem (mindestens) eine Lösung hat und wir müssen mit der Diskussion fortfahren.
- iii) Die Anzahl der Variablen ist  $n = 3$ , also  $n - r = 0$ . Das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung.

Dieses Beispiel entspricht also dem Fall 2)b)I). Die Lösung ergibt sich wieder durch das Rückwärtseinsetzen. Von der 3. Zeile ausgehend erhalten wir zuerst  $x_3 = 2$ . Aus der 2. Zeile folgt

$$-3x_2 + 8x_3 = -1 \quad \Rightarrow \quad 3x_2 = 2 + 8x_3 = 2 + 8 \cdot 2 = 18 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 6.$$

Fehlt noch die 1. Zeile, welche uns  $x_1$  berechnen lässt:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \\ \Rightarrow x_1 = 5 + x_2 - 3x_3 = 5 + 6 - 3 \cdot 2 = 5 \\ &\Rightarrow x_1 = 5. \end{aligned}$$

Die Lösung ist ein Punkt im dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$ , als Vektor geschrieben

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

4)

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline \boxed{2} & -1 & 3 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & -3 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{0}_{c_3} \end{array}$$

- i) Der Rang ist  $r = 2$ , denn wir haben zwei Pivotelemente.
- ii) Wir haben eine Nullzeile, es ist  $0 < r = 2 < m = 3$ . Der Wert auf der rechten Seite der Nullzeile  $c_3$  ist null. Das lineare Gleichungssystem hat also (mindestens) eine Lösung.

iii) Die Anzahl der Variablen ist grösser als der Rang  $n - r > 0$ . Das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen mit  $n - r = 3$  freien Parametern.

Dieses Beispiel entspricht also dem Fall 2)b)II). Um die Lösung hinzuschreiben, setzen wir die Variablen in den Spalten ohne Pivotelemente als freie Parameter fest, d.h. wir wählen

$$x_2 = r, \quad x_4 = s \quad \text{und} \quad x_5 = t, \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

Dann bestimmen wir die restlichen Variablen durch Rückwärtseinsetzen, beginnend mit  $x_3$  aus der 2. Zeile:

$$\begin{aligned} 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 &= -1 \\ \Rightarrow 2x_3 + 3s - 3t &= -1 \\ &\Rightarrow 2x_3 = -1 - 3s + 3t \\ &\Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}s + \frac{3}{2}t \end{aligned}$$

Für  $x_1$  erhält man dann aus der 1. Zeile:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= -2 \\ \Rightarrow 2x_1 - r + 3\left(-\frac{3}{2}s + \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\right) - s + t &= -2 \\ &\Rightarrow 2x_1 = -\frac{1}{2} + r + \frac{11}{2}s - \frac{11}{2}t \\ &\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}r + \frac{11}{4}s - \frac{11}{4}t \end{aligned}$$

Als Vektor geschrieben bekommen wir

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}r + \frac{11}{4}s - \frac{11}{4}t \\ r \\ -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}s + \frac{3}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{11}{4} \\ 0 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

Man kann das Resultat noch etwas schöner schreiben, indem man die Brüche in den Vektoren bei  $r$ ,  $s$  und  $t$  los wird. Man erhält:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ -6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}$$

Geometrisch entspricht die Lösung einem dreidimensionalen Unterraum des  $\mathbb{R}^5$ .

### 3.3.5 Homogene lineare Gleichungssysteme

#### Definition 3.3.4 (Homogene lineare Gleichungssysteme)

Ein lineares Gleichungssystem der Form  $Ax = 0$ , wobei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  eine  $m \times n$ -Matrix heisst **homogenes** lineares Gleichungssystem.

#### Satz 3.3.5

Sei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  eine  $m \times n$ -Matrix. Ein homogenes lineares Gleichungssystem  $Ax = 0$  hat mindestens den Nullvektor als Lösung, das heisst:

$$x = 0 \Rightarrow Ax = 0$$

#### Korollar 3.3.6

Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat mindestens eine Lösung.

Da die rechte Seite (also der Vektor  $b$ ) in einem homogenen linearen Gleichungssystem der Nullvektor ist, muss man diese rechte Seite beim Durchführen des Gauss-Algorithmus nicht mitschleppen. Da der Nullvektor in jedem Fall immer eine Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems ist, kann ein solches Gleichungssystem niemals keine Lösung haben. Und noch mehr: wenn ein homogenes lineares Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, dann muss diese Lösungsmenge immer durch den Nullpunkt verlaufen.

**Bemerkungen:**

- Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems  $Ax = 0$  ist die Menge der Vektoren  $x \in \mathbb{K}^n$ , die auf den Nullvektor abgebildet werden. Diese Menge bezeichnet man als den **Kern** der Matrix  $A$ , kurz:  $\ker(A)$ .
- Aufgrund der Aussage des Satzes 3.3.5 gilt immer  $0 \in \ker(A)$ .

Wie kann die Lösungsmenge von homogenen linearen Gleichungssystemen aussehen, d.h. welche Fälle können eintreten? Es sind nur zwei Fälle möglich:

1.  $\text{rang}(A) = n$ :

In diesem Fall gibt es genau eine Lösung. Aufgrund von Satz 3.3.5 ist aber schon klar, dass diese eindeutige Lösung der Nullvektor sein muss. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \text{rang}(A) = n &\Leftrightarrow \text{genau eine Lösung } x = 0 \\ &\Leftrightarrow \ker(A) = \{0\}. \\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(A)) = 0. \end{aligned}$$

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn  $m \geq n$ . Betrachte dazu folgende Beispiele:

**Beispiele:**

i) Das Endschema eines homogenen linearen Gleichungssystems sei

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & -1 & 3 & \\ 0 & -3 & 8 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}$$

Es sind drei Pivotelemente, der Rang ist also 3. Das homogene lineare Gleichungssystem hat folglich genau eine Lösung und diese ist notwendigerweise der Nullvektor. Man schreibt:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \ker(A) = \{0\}.$$

Man sieht, dass die Einträge im Endschema in diesem Fall gar keine Rolle spielen.

ii) Es können im Endschema auch noch Nullzeilen vorhanden sein, das ändert nichts an der Situation:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & -1 & 3 & \\ 0 & -3 & 8 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Auch hier ist der Rang  $r = n = 3$  und die Lösung wiederum der Nullvektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.  $0 \leq \text{rang}(A) < n$ :

Setzen wir  $r := \text{rang}(A)$ . Man erhält  $n - r$  Spalten ohne Pivoelement und folglich hat man  $n - r$  freie Parameter. Die Lösungsmenge ist ein  $n - r$ -dimensionaler Unterraum von  $\mathbb{K}^n$ . Es gilt also:

$$\begin{aligned} 0 \leq r < n &\Leftrightarrow \text{unendlich viele Lösungen} \\ &\Leftrightarrow \ker(A) \text{ ist } n - r\text{-dimensionaler Unterraum} \\ &\Leftrightarrow \dim(\ker(A)) = n - r. \end{aligned}$$

**Beispiele:**

i) Beim Endschema

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 5 & 0 & \\ 0 & 1 & 1 & \end{array}$$

ist der Rang  $r = 2$  und damit erhalten wir unendlich viele Lösungen mit  $n - r = 3 - 2 = 1$  freien Variablen. Wir setzen  $x_3 = t$  und bekommen aus der 2. Zeile  $x_2 = -t$ . Die 1. Zeile ergibt:  $x_1 = -5x_2 = 5t$ . Die Lösungsmenge ist eine Gerade im  $\mathbb{R}^3$  durch den Nullpunkt

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

ii) Auch in diesem Fall ist es irrelevant, ob noch Nullzeilen vorhanden sind. Das Endschema

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 2 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

ergibt Rang  $r = 1$  und damit unendlich viele Lösungen mit  $n - r = 3 - 1 = 2$  freien Variablen. Wir wählen  $x_2 = s$ ,  $x_3 = t$ , wobei  $s, t \in \mathbb{R}$  beliebige reelle Zahlen sind. Dann erhalten wir

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2x_2 + x_3 = -2s + t.$$

Dies entspricht geometrisch einer Ebene im  $\mathbb{R}^3$ , nämlich

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s + t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

### Bemerkung:

Wir stellen noch fest, dass für eine  $m \times n$ -Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  offenbar immer gilt, dass

$$\dim(\ker(A)) + \text{rang}(A) = n.$$

Diese Tatsache ist der sogenannte Rangsatz, den wir im Abschnitt 6.4 genauer kennenlernen werden (Satz 6.4.3).

## 3.4 LU-Zerlegung von Matrizen

### 3.4.1 Definition und Berechnung der LU-Zerlegung

#### Illustrationsbeispiel

Wir betrachten eine reelle  $3 \times 3$ -Matrix gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

welche zum Beispiel die Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystem sein könnte. Wenn wir nun den Gauss-Algorithmus für diese Matrix  $A$  durchführen, dann ist bekanntlich der erste Eliminationsschritt

- 2. Zeile  $-1$ -mal die 1. Zeile, was

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & \\ 3 & 3 & 1 & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 0 & -1 & -2 & \\ 3 & 3 & 1 & \end{array}$$

ergibt.

- 3. Zeile  $-3$ -mal die 1. Zeile führt danach auf

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 0 & -1 & -2 & \\ 3 & 3 & 1 & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 0 & -1 & -2 & \\ 0 & -3 & -8 & \end{array}$$

Ist es wohl möglich, dass man diesen Schritt auch durch eine Matrixmultiplikation beschreiben kann? Die Antwort darauf ist tatsächlich Ja. Das Matrixprodukt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=:L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_A$$

rekonstruiert nämlich die ursprüngliche Matrix  $A$ . Man beachte dabei, wie die Einträge der Matrix  $L_1$  zustande kommen. Man geht von der Einheitsmatrix aus, aber dann werden unterhalb der Hauptdiagonalen genau die entsprechenden Werte eingetragen, mit welchen man die Pivotzeile multiplizieren musste beim Eliminationsschritt. Das kann doch kein Zufall sein! Probieren wir doch dieses Prinzip auch beim 2. Eliminationsschritt aus. Dieser lautet:

- 3. Zeile - 3-mal die 2. Zeile

$$\begin{array}{|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -8 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} \end{array}$$

und tatsächlich

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{=:L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{=:U} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_A$$

Wir haben nun also mit Hilfe des Gauss-Algorithmus die ursprüngliche Matrix  $A$  in ein Produkt von zwei Faktoren  $L$  und  $U$  zerlegt,  $A = L \cdot U$ , wobei die Matrix  $U$  unsere bekannte und schon lieb gewonnene Zeilenstufenform ist. Die Matrix  $L$  ist eine Matrix mit lauter Einsen auf der Hauptdiagonalen und alle Einträge oberhalb dieser Hauptdiagonalen sind Nullen. Eine solche Zerlegung bezeichnet man als **LU-Zerlegung**. Die beiden Matrizen dieser Faktorisierung tragen nicht zufällig die Buchstaben  $U$  und  $L$ , wie die folgende Definition erklärt.

#### Definition 3.4.1 (Dreiecksmatrizen)

- Eine **obere Dreiecksmatrix** ist eine  $n \times n$ -Matrix  $U = (u_{ij})$ , sodass  $u_{ij} = 0$ , falls  $i > j$ .
- Eine **untere Dreiecksmatrix** ist eine  $n \times n$ -Matrix  $L = (l_{ij})$ , sodass  $l_{ij} = 0$ , falls  $i < j$ .
- Sind bei einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix zusätzlich alle Elemente auf der Hauptdiagonalen gleich 1, handelt es sich um eine **unipotente** (obere oder untere) Dreiecksmatrix.
- Eine **Diagonalmatrix** ist eine  $n \times n$ -Matrix  $D = (d_{ij})$ , sodass  $d_{ij} = 0$ , falls  $i \neq j$ .

#### Bemerkungen:

- Die Abkürzungen  $U$  und  $L$  für obere und untere Dreiecksmatrizen rühren von den englischen Begriffen "Upper triangular" und "Lower triangular" her.
- Im deutschen Sprachraum wird eine obere Dreiecksmatrix häufiger als **Rechtsdreiecksmatrix** (und mit dem Buchstaben  $R$  bezeichnet und eine untere Dreiecksmatrix wird **Linksdreiecksmatrix** (Buchstabe  $L$ ) genannt. Dementsprechend ist die  $LU$ -Zerlegung in deutschen Lehrbüchern auch häufig unter dem Namen  $LR$ -Zerlegung zu finden.
- Diagonalmatrizen sind besonders praktisch. Es handelt sich bei Diagonalmatrizen um einfache Streckungen entlang den Koordinatenachsen. Die Zahlen auf der Diagonalen entsprechen den Streckungsfaktoren der jeweiligen Achse. Wir werden uns in einem gesamten Kapitel (Kap. 7) damit beschäftigen, ob und wie man eine beliebige Matrix auf eine Diagonalmatrix vereinfachen kann.

#### Beispiele:

- Die Matrix

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ist eine obere Dreiecksmatrix.

ii) Die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

ist eine untere Dreiecksmatrix.

iii) Die Matrix

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine unipotente obere Dreiecksmatrix.

iv) Die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Diagonalmatrix.

### Definition 3.4.2 (LU-Faktorisierung)

Eine Zerlegung

$$A = L \cdot U$$

einer Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  in eine obere Dreiecksmatrix  $U$  und eine unipotente untere Dreiecksmatrix  $L$  heisst  $LU$ -Faktorisierung (engl.:  $LU$ -decomposition).

### Aufgabe

Erstellen Sie die  $LU$ -Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 25 & -18 & -13 \\ -15 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

### Lösung

$$\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{5} & -3 & -2 & & & \\ 25 & -18 & -13 & & & \\ -15 & -3 & -2 & & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{5} & -3 & -2 & & & \\ \color{red}{5} & \boxed{-3} & -3 & & & \\ \color{red}{-3} & -12 & -8 & & & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{5} & -3 & -2 & & & \\ \color{red}{5} & \boxed{-3} & -3 & & & \\ \color{red}{-3} & \color{red}{4} & \boxed{4} & & & \end{array}$$

wobei wir die Einträge von  $U$  in blau und die Einträge von  $L$  in rot markiert haben. Wir bekommen also

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \color{red}{5} & 1 & 0 \\ \color{red}{-3} & \color{red}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

### Verallgemeinerung

Die  $LU$ -Zerlegung kann auch auf nicht quadratische Matrizen  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  verallgemeinert werden. Die Matrix  $L$  ist dann eine unipotente  $m \times m$ -Matrix und die Matrix  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist eine Zeilenstufenform von  $A$ . Schematisch sind das für eine  $4 \times 5$ -Matrix zum Beispiel wie folgt aus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{*} & * & * & * & * \\ 0 & \boxed{*} & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{*} & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 3.4.2 Anwendung für die Lösung von linearen Gleichungssystemen

Die  $LU$ -Zerlegung kann zur Lösung von linearen Gleichungssystemen verwendet werden. Die Lösung eines allgemeinen linearen Gleichungssystems  $Ax = b$ ,  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{K}^m$ , mit Hilfe der  $LU$ -Zerlegung erfolgt in drei Schritten:

1) Bestimmung einer  $LU$ -Zerlegung der Matrix  $A = L \cdot U$

- 2) Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ly = b$  nach  $y$  (durch sogenanntes **Vorwärtseinsetzen**)
- 3) Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ux = y$  nach  $x$  (durch sogenanntes **Rückwärtseinsetzen**)

**Bemerkung:**

Man kann ausrechnen, dass bei diesem Algorithmus zur Lösung eines linearen Gleichungssystems ( $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ) insgesamt

$$\frac{n^3}{3} + n^2 - \frac{n}{3} \rightarrow \mathcal{O}(n^3) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Rechenoperationen<sup>4</sup> benötigt werden. Der Rechenaufwand liegt vor allem in der  $LU$ -Zerlegung, der Aufwand für das Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen ist vernachlässigbar. Der Speicherplatz (vor allem für die Matrix  $A$ ) beträgt dabei natürlich  $\mathcal{O}(n^2)$ . In der Praxis können durchaus lineare Gleichungssysteme mit  $n = 10^7$  auftreten. Für derart grosse lineare Gleichungssysteme sind direkte Verfahren, wie das hier Beschriebene ungeeignet und man verwendet meistens sogenannte iterative Verfahren.

Im folgenden Beispiel soll nun das beschriebene Verfahren explizit angewendet werden:

**Beispiel**

Wir möchten mit Hilfe der  $LU$ -Zerlegung das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

lösen. Wir gehen vor nach dem soeben beschriebenen Algorithmus:

- 1)  $LU$ -Zerlegung: die Koeffizientenmatrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

deren  $LU$ -Zerlegung wir ja bereits bestimmt hatten. Wir führen sie hier jedoch noch einmal aus, wobei wir mit den berechneten Elementen der Matrizen  $L$  und  $U$  gerade die Matrix  $A$  befüllen (in-place):

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{|ccc|} \hline \boxed{1} & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{|ccc|} \hline \boxed{1} & 2 & 3 \\ \hline \color{red}{1} & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} & \longrightarrow & \\ \longrightarrow & \begin{array}{|ccc|} \hline \boxed{1} & 2 & 3 \\ \hline \color{red}{1} & \boxed{-1} & -2 \\ \color{red}{3} & -3 & -8 \\ \hline \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{|ccc|} \hline \boxed{1} & 2 & 3 \\ \hline \color{red}{1} & \boxed{-1} & -2 \\ \color{red}{3} & \color{red}{3} & \boxed{-2} \\ \hline \end{array} & & \end{array}$$

In der letzten Matrix sind  $L$  und  $U$  verpackt dargestellt, wobei die roten Elemente zu  $L$ , die blauen Elemente zu  $U$  gehören.

- 2) Vorwärtseinsetzen: wir lösen nun das lineare Gleichungssystem  $Ly = b$  nach  $y$  auf, was durch Vorwärtseinsetzen möglich ist. Aus

$$\begin{array}{ccc|c} y_1 & y_2 & y_3 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

folgt zuerst  $y_1 = 1$ , dann  $y_2 = -1 - y_1 = -2$  und schliesslich  $y_3 = 2 - 3y_1 - 3y_2 = 5$ , also

$$y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

---

<sup>4</sup>Man berücksichtigt hier die elementaren Rechenoperationen, sogenannte floating point operations.

3) Rückwärtseinsetzen: zu guter Letzt lösen wir das lineare Gleichungssystem  $Ux = y$ , was uns die endgültige Lösung  $x$  liefern wir durch Rückwärtseinsetzen. Mit

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{array}$$

folgt als Erstes  $x_3 = -\frac{5}{2}$  und danach

$$\begin{aligned} -x_2 = -2 + 2x_3 = -7 &\Rightarrow x_2 = 7 \\ x_1 = 1 - 3x_3 - 2x_2 = -\frac{11}{2} \end{aligned}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystem ist also

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ 7 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Es ist ratsam die gefundene Lösung zu kontrollieren, indem man sie ins ursprüngliche lineare Gleichungssystem einsetzt. Wir rechnen nach,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{11}{2} \\ 7 \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

### 3.4.3 LU-Zerlegung mit Zeilenvertauschungen

#### Illustrationsbeispiel

Wir möchten für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die  $LU$ -Zerlegung berechnen. Der erste Eliminationsschritt des Gauss-Algorithmus ergibt

$$\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & \\ \hline 2 & 4 & 2 & \\ -1 & 1 & 3 & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & \\ \hline 0 & 0 & -4 & \\ 0 & 3 & 6 & \end{array}$$

Hier tritt nun der Fall ein, dass beim Gauss-Algorithmus eine Zeilenvertauschung notwendig wird. Es muss nämlich die 2. Zeile durch die 3. Zeile ersetzt werden, weil wir die Null nicht als Pivotelement wählen dürfen. Nach der Vertauschung erhalten wir

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Die gleiche Vertauschung müssen wir natürlich auch in der Matrix  $L$  vornehmen und erhalten

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir aber

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

berechnen, erhalten wir nicht  $A$ , sondern  $A$  inklusive der vorgenommenen Zeilenvertauschungen. Diese Zeilenvertauschungen können durch sogenannte **Permutationsmatrizen** beschrieben werden. Eine Vertauschung von Zeile 2 und Zeile 3 wie in diesem Beispiel hat die Permutationsmatrix

$$P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die vollständige  $LU$ -Zerlegung inklusive der Zeilenvertauschungen (Pivotisierung) lautet, also  $P \cdot A = L \cdot U$ , wobei

$$P = P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Werden in einer Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  ganz allgemein die Zeilen  $i$  und  $j$  miteinander vertauscht, so ist die zugehörige Permutationsmatrix

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $P_{ij}$  ist im wesentlichen die Einheitsmatrix  $1_n$ , ausser in der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeile, wo die 1 in der  $j$ -ten bzw. der  $i$ -ten Spalte steht.

### Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Die Frage stellt sich nun, wie wir die einzelnen Schritte des Lösungsverfahrens für lineare Gleichungssysteme modifizieren müssen, wenn bei der  $LU$ -Zerlegung Zeilen vertauscht werden müssen. Wenn wir also das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  lösen möchten, wobei wir uns wieder auf  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  beschränken, dann erhalten wir durch Multiplikation mit der Permutationsmatrix  $P$  von links die Gleichung

$$PAx = LUx = Pb$$

Daraus folgt sofort das veränderte Lösungsverfahren bei Zeilenvertauschungen. Die Zeilenvertauschungen müssen ganz einfach auch auf die rechte Seite  $b \in \mathbb{R}^n$  angewendet werden:

1)  $LU$ -Zerlegung der Matrix  $A$ :

$$P \cdot A = L \cdot U$$

2) Vorwärtseinsetzen:

$$Ly = Pb \Rightarrow y$$

3) Rückwärtseinsetzen:

$$Ux = y \Rightarrow x$$

## 3.5 Lineare Ausgleichsrechnung

### 3.5.1 Einführungsbeispiel: Regressionsgerade

Es seien  $N > 2$  Punkte  $(x_i|y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  gegeben durch welche eine Gerade

$$y = f(x) = mx + q$$

gelegt werden soll. Die Punkte sollen also die  $N$  Gleichungen

$$y_i = mx_i + q, i = 1, \dots, N$$

erfüllen. Es handelt sich dabei um ein lineares Gleichungssystem, für die beiden Unbekannten Parameter  $m$  (Steigung der Geraden) und  $q$  ( $y$ -Achsenabschnitt) mit  $N$  Gleichungen. Wir schreiben das Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Schreibweise um. Wir erhalten die  $Ax = b$ , wobei

$$x := \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_N & 1 \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem hat natürlich in der Regel keine Lösung und es gilt in der Regel  $\text{rang}(A) = 2$ . Das ist ja auch klar, weil normalerweise nicht alle  $N$  Punkte auf einer Geraden liegen können. Wir wollen jedoch diejenige Gerade finden, die den gegebenen Punkten "möglichst nahe" kommt. Wir suchen also denjenigen Vektor  $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ , welcher das Residuum

$$\|r\| := \|b - Ax\|$$

minimiert. Bevor wir die Methode im Detail beschreiben, brauchen wir noch einige zusätzliche Begriffe der Matrizenrechnung.

### 3.5.2 Transponierte Matrix und symmetrische Matrizen

#### Definition 3.5.1 (Transponierte Matrix)

Sei  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$  eine  $m \times n$ -Matrix. Die zu  $A$  **transponierte** Matrix ist die Matrix  $A^T = (a_{ij}^T)$  mit Matrixelementen  $a_{ij}^T = a_{ji}$ .

Die transponierte Matrix erhält man also wenn man die Zeilen einer Matrix der Reihe nach in die Spalten einer Matrix schreibt.

#### Beispiele:

1)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Da das Transponieren aus einem Spaltenvektor ein Zeilenvektor macht, ergibt sich daraus eine neue Schreibweise für das Skalarprodukt von zwei Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , nämlich:  $\langle x, y \rangle = x^T y$ .

#### Lemma 3.5.2

Für das Transponieren von Matrizen gelten folgende Rechenregeln:

i)  $(A + B)^T = A^T + B^T, \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$

ii)  $(\lambda A)^T = \lambda A^T, \quad \forall A \in \mathbb{K}^{m \times n}, \lambda \in \mathbb{K}$

iii)  $(A^T)^T = A \quad \forall A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$

iv)  $(AB)^T = B^T A^T, \quad \forall A \in \mathbb{K}^{m \times l}, B \in \mathbb{K}^{l \times n}$

*Beweis.* Wir beweisen nur die letzte Eigenschaft:

iv) Seien  $A = (a_{ik}) \in \mathbb{K}^{m \times l}$  und  $B = (b_{kj}) \in \mathbb{K}^{l \times n}$ . Das Produkt der zwei Matrizen lautet in Komponenten:

$$AB = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} B^T A^T &= \sum_{k=1}^l b_{jk}^T a_{ki}^T = \sum_{k=1}^l b_{kj} a_{ik} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj} = \\ &= \left( \sum_{k=1}^l a_{jk} b_{ki} \right)^T = (AB)^T, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

□

#### Definition 3.5.3 (Adjungierte Matrix)

Sei  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$  eine  $m \times n$ -Matrix. Die zu  $A$  **adjungierte** Matrix ist die Matrix  $A^* = (a_{ij}^*)$  mit den Matrixelementen  $a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}$ .

Die adjungierte Matrix bekommt man also, wenn man eine Matrix transponiert und alle Matrixelemente auch noch komplex konjugiert.

**Beispiele:**

i)

$$A = \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & i \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

ii)

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^* = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

An diesem Beispiel sieht man, dass für reelle Matrizen die adjungierte und die transponierte Matrix dasselbe ist.

**Lemma 3.5.4**

Für die adjungierte Matrix  $A^*$  gilt:

- i)  $(A + B)^* = A^* + B^*$ ,  $\forall A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$
- ii)  $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ ,  $\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n}, \lambda \in \mathbb{K}$
- iii)  $(A^*)^* = A$   $\forall A \in \mathbb{K}^{m \times n}$
- iv)  $(AB)^* = B^* A^*$ ,  $A \in \mathbb{K}^{m \times l}, B \in \mathbb{K}^{l \times n}$

**Definition 3.5.5 (Spur einer Matrix)**

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine  $n \times n$ -Matrix. Die Spur von  $A$  ist definiert durch

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Die Spur ist also die Summe der Matrixelemente auf der Hauptdiagonalen.

**Symmetrische und hermitesche/selbstadjungierte Matrizen**

**Definition 3.5.6 ((Anti-)Symmetrische Matrizen)**

Eine reelle Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heisst:

- i) **symmetrisch**, falls  $A^T = A$ .
- ii) **anti-symmetrisch**, falls  $A^T = -A$ .

**Satz 3.5.7**

Eine anti-symmetrische Matrix ist spurfrei, d.h.

$$A^T = -A \Rightarrow \text{tr}(A) = 0$$

*Beweis.* Eine antisymmetrische Matrix hat auf der Hauptdiagonalen nur Nullen als Einträge. Daher ist klar, dass ihre Spur verschwindet. □

**Beispiele:**

1) Die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch.

2) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ist antisymmetrisch.

**Definition 3.5.8 ((Anti-)Hermitesche Matrizen)**

Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  heisst:

- i) **hermitesch** oder **selbstadjungiert**, falls  $A^* = A$ .
- ii) **anti-hermitesch** oder **anti-selbstadjungiert**, falls  $A^* = -A$ .

**Satz 3.5.9**

Eine selbstadjungierte Matrix hat eine reelle Spur.

*Beweis.* Die Elemente auf der Hauptdiagonalen einer hermiteschen Matrix müssen einen verschwindenden Imaginärteil haben, sind also reell.  $\square$

**Bemerkungen:**

- 1) Reelle selbstadjungierte Matrizen  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sind symmetrisch. Ebenso sind reelle anti-hermitesche Matrizen antisymmetrisch.
- 2) Hermitesche Matrizen spielen eine enorme Rolle in der Quantenmechanik. In der Quantenmechanik wird jede messbare physikalische Grösse durch eine hermitesche Matrix beschrieben.

**Beispiele:**

- 1) Die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} -1 & 2 - 3i \\ 2 + 3i & \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

ist hermitesch. Die Elemente auf der Hauptdiagonalen sind reell.

- 2) Berühmte hermitesche Matrizen sind die sogenannten Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sie beschreiben in der Physik den Eigendrehimpuls oder Spin von Elektronen.

**Satz 3.5.10**

- i) Seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m$ . Dann gilt:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$$

- ii) Seien  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  und  $x \in \mathbb{K}^n, y \in \mathbb{K}^m$ . Dann gilt:

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

*Beweis.* Wir benutzen, dass man das Skalarprodukt als Matrixprodukt eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor auffassen kann:

$$\text{i) } \langle Ax, y \rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = \langle x, A^T y \rangle.$$

$$\text{ii) } \langle Ax, y \rangle = \overline{(Ax)^T y} = \overline{x^T A^T y} = \bar{x}^T \overline{A^T} y = \bar{x}^T A^* y = \langle x, A^* y \rangle. \quad \square$$

**Korollar 3.5.11**

Für symmetrische Matrizen und hermitesche Matrizen gilt:  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$ .

*Beweis.* Eine reelle Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist symmetrisch, falls  $A = A^T$ . Dann liefert Teil i) des der vorhergehenden Satz sofort die Behauptung. Analog erfüllt eine hermitesche Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  die Gleichung  $A = A^*$  und mit Teil ii) des vorhergehenden Satzes folgt wieder die Behauptung.  $\square$

### 3.5.3 Normalengleichungen

Kehren wir nun zurück zur Minimierung des Residuums

$$\|r\| = \|b - Ax\|.$$

Wir schreiben das Residuum nun wie folgt um:

$$\begin{aligned} \|r\|^2 &= \langle b - Ax, b - Ax \rangle = \langle b, b \rangle - 2\langle Ax, b \rangle + \langle Ax, Ax \rangle = b^T b - 2(Ax)^T b + (Ax)^T (Ax) = \\ &= x^T A^T A x - 2x^T A^T b + b^T b \end{aligned}$$

Wenn diese Gleichung nach dem Vektor  $x$  abgeleitet wird und diese Ableitung gleich null gesetzt wird, erhält man die sogenannten Normalengleichungen, deren Lösung uns den gewünschten Vektor  $\bar{x}$  liefern, welcher das Residuum minimiert:

#### Satz 3.5.12

Ist ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{R}^{N \times n}$$

überbestimmt ( $N > n$ ) und hat keine Lösung, dann liefert die Lösung der Normalengleichungen

$$A^T A \bar{x} = A^T b$$

denjenigen Vektor  $\bar{x}$  als Lösung, welcher den quadratischen Fehler (Residuum)

$$\|r\|^2 = \|b - A\bar{x}\|^2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|b - Ax\|^2$$

#### Beispiele:

- i) Gegeben seien die 5 Punkte  $(-2|1)$ ,  $(1|2)$ ,  $(2|4)$ ,  $(4|3)$  und  $(5|4)$ . Wir suchen die sogenannte Regressionsgerade, d.h. diejenige Gerade  $y = f(x) = mx + q$ , die sich den Daten optimal anpasst, indem die quadratische Abweichung minimiert wird ("least squares"). Wir erhalten das lineare Gleichungssystem

$$y_i = mx_i + q \cdot 1, \quad i = 1, \dots, 5$$

also  $Ax = b$ , wobei

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix}.$$

Das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  ist überbestimmt und hat natürlich keine Lösung. Wir lösen stattdessen die Normalengleichungen

$$A^T A \bar{x} = A^T b$$

nach  $\bar{x}$  auf. Wir bekommen

$$\begin{aligned} C := A^T A &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 & 10 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} \\ y := A^T b &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die  $LU$ -Zerlegung von  $C$  ergibt:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 50 & 10 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Dann ergibt Vorwärtseinsetzen  $v_1 = 40$  und  $v_2 = 14 - \frac{40}{5} = 6$ . Danach das Rückwärtseinsetzen  $q = 2$  und  $m = \frac{2}{5}$ . Damit ist also der gesuchte Vektor

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} m \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

die gesuchte Regressionsgerade

$$y = \frac{2}{5}x + 2$$

Der Residuenvektor ist

$$r = b - Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und das Residuum

$$\|r\| = \left\| \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{5} \sqrt{1 + 4 + 36 + 9 + 0} = \frac{\sqrt{50}}{5} = \sqrt{2}$$

In Abb. 3.1 sind die 5 Punkte und die dazugehörige Regressionsgerade dargestellt. Die gegebenen Punkte streuen sehr stark, weshalb das Residuum auch relativ gross herauskommt.

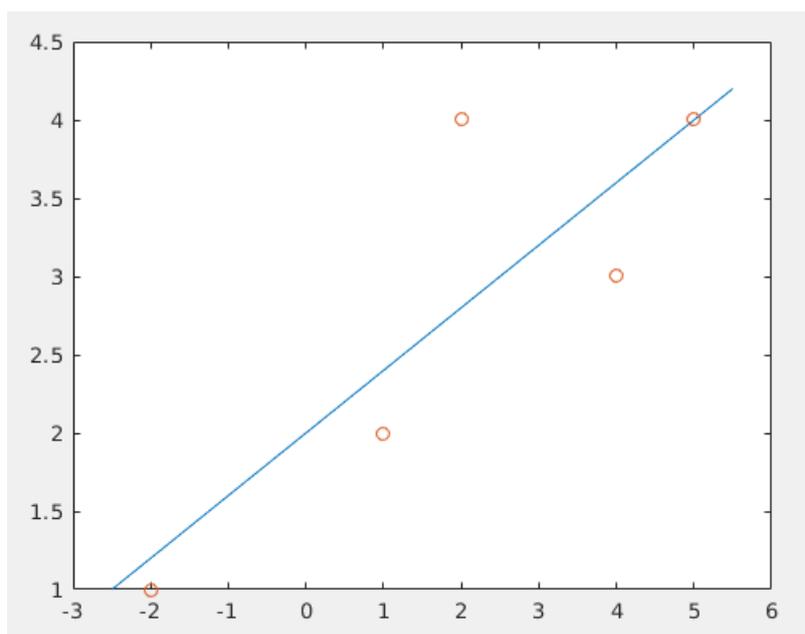


Abbildung 3.1: Gegebene Punkte (rote Kreise) und die Regressionsgerade  $y = f(x) = 0.4 \cdot x + 2$  (blaue Kurve).

- ii) Beim Kugelstossen wurde die Flugbahn der Kugel eines Stosses mit Hilfe von Videoaufnahmen ausgemessen. Die Messergebnisse sind in der Tabelle 3.1 aufgelistet.

$i$	1	2	3	4	5	6
$x_i$	0	4	8	12	16	20
$y_i$	2	4.93	6.39	6.37	4.88	1.91

Tabelle 3.1: Ausgemessene Flugbahn einer Kugel beim Kugelstossen, wobei  $x_i$  die Distanz und  $y_i$  die Höhe der Kugel bei der entsprechenden Distanz beschreibt. Alle Angaben in Metern.

Wenn wir den Luftwiderstand vernachlässigen, was beim Kugelstossen eine einigermaßen vernünftige Annahme ist, dann müsste sich die Kugel auf einer Parabelbahn

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

bewegen. Wir wollen nun diejenige Parabel finden, welche den quadratischen Fehler minimiert. Das dazugehörige lineare Gleichungssystem  $A \cdot x = b$  lautet

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \\ 1 & x_6 & x_6^2 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}}_{=:x} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{pmatrix}}_{=:b}$$

also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \\ 1 & x_6 & x_6^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 8 & 64 \\ 1 & 12 & 144 \\ 1 & 16 & 256 \\ 1 & 20 & 400 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4.93 \\ 6.39 \\ 6.37 \\ 4.88 \\ 1.91 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörigen Normalgleichungen für das lineare Ausgleichsproblem sind

$$A^T A x = A^T b$$

und wir erhalten

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 60 & 880 \\ 60 & 880 & 14'400 \\ 880 & 14'400 & 250'624 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 \\ 0 & 16 & 64 & 144 & 256 & 400 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4.93 \\ 6.39 \\ 6.37 \\ 4.88 \\ 1.91 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26.48 \\ 263.6 \\ 3'418.4 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems ist

$$x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 0.9174 \\ -0.0461 \end{pmatrix}$$

und somit ist die gesuchte Parabel

$$y(x) = 1.9993 + 0.9174x - 0.0461x^2.$$

In Abb. 3.2 ist diese Parabel zusammen mit den Messpunkten dargestellt. Das Residuum beträgt übrigens

$$\|r\| = \|b - Ax\| = 0.0029.$$

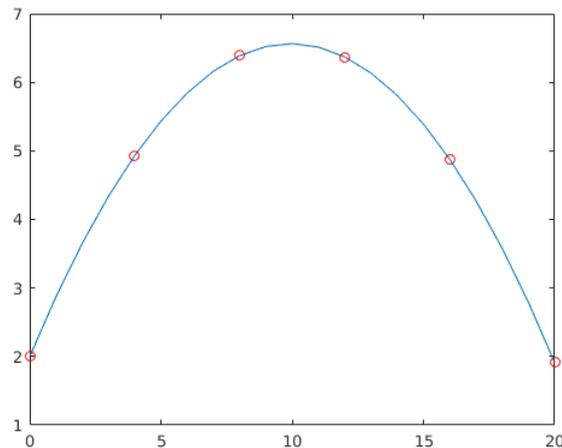


Abbildung 3.2: Gegebene Punkte (rote Kreise) der gemessenen Flugbahn der Kugel und die mit Hilfe der linearen Ausgleichsrechnung bestimmte Parabel (blaue Kurve).

## 3.6 Determinante von Matrizen

### 3.6.1 Determinante von $2 \times 2$ -Matrizen

#### Definition 3.6.1 (Determinante für $2 \times 2$ -Matrizen)

Wir definieren die Determinante  $\det(A)$  der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{2 \times 2}$$

bzw. die Determinante ihrer beider Spaltenvektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

durch

$$\det(A) \equiv \det(a_1, a_2) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Wie kann man diese Determinante geometrisch interpretieren? Was ist  $\det(A)$  ausgedrückt durch die beiden Spalten von  $A$ ,  $a_1$  und  $a_2$ ? Einen Hinweis liefert das folgende Beispiel:

#### Beispiel:

Betrachten wir die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 0 \cdot 0 = -6.$$

Was könnte diese Zahl bedeuten? Wir stellen fest, dass die beiden Spaltenvektoren in  $M$ ,

$$m_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

ein Rechteck mit Seitenlänge 3 und 2 aufspannen. Das heißt, der Betrag der Determinante gibt den Flächeninhalt des von den Spaltenvektoren aufgespannten Rechtecks an. Über die Bedeutung des Vorzeichens der Determinante machen wir uns später noch Gedanken.

Für beliebige  $2 \times 2$ -Matrizen erfüllt die Determinante die folgenden Eigenschaften:

**Satz 3.6.2**

i)  $\det(\mathbb{1}_2) = \det(e_1, e_2) = 1$

ii)  $\det : \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$  ist eine sogenannte **2-Form**, d.h.

- $\det$  ist bilinear:

$$\begin{aligned} \det(\lambda a_1, a_2) &= \lambda \det(a_1, a_2) = \det(a_1, \lambda a_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \\ \det(a_1 + b_1, a_2) &= \det(a_1, a_2) + \det(b_1, a_2), \quad \forall a_1, a_2, b_1 \in \mathbb{K}^2 \\ \det(a_1, a_2 + b_2) &= \det(a_1, a_2) + \det(a_1, b_2), \quad \forall a_1, a_2, b_2 \in \mathbb{K}^2 \end{aligned}$$

- $\det$  ist alternierend:

$$\det(a_1, a_2) = -\det(a_2, a_1)$$

iii) Für  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$  entspricht  $|\det(A)| = |\det(a_1, a_2)|$  der Fläche des von  $a_1$  und  $a_2$  aufgespannten Parallelogramms.*Beweis.* i)

$$\det(\mathbb{1}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1.$$

ii) Um diese Eigenschaften zu beweisen, muss man diese einfach nachrechnen.

iii) Die Fläche des von zwei beliebigen Vektoren  $a_1$  und  $a_2$  aufgespannten Parallelogramms ist

$$F = h \|a_1\|,$$

wobei  $h$  die Höhe des Parallelogramms ist. Diese Höhe kann aber durch den  $\sin(\varphi)$  des Zwischenwinkels zwischen  $a_1$  und  $a_2$  ausgedrückt werden,

$$h = \|a_2\| \sin(\varphi).$$

Wir bekommen

$$F = \|a_1\| \|a_2\| \sin(\varphi) = \|a_1\| \|a_2\| \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)}.$$

Für den Winkel zwischen zwei Vektoren  $a_1$  und  $a_2$  jedoch kennen wir die Formel

$$\cos(\varphi) = \frac{a_1 \cdot a_2}{\|a_1\| \|a_2\|}.$$

Eingesetzt erhält man für die Fläche des Parallelogramms schliesslich

$$\begin{aligned} F &= \|a_1\| \|a_2\| \sqrt{1 - \frac{(a_1 \cdot a_2)^2}{\|a_1\|^2 \|a_2\|^2}} = \|a_1\| \|a_2\| \sqrt{\frac{\|a_1\|^2 \|a_2\|^2 - (a_1 \cdot a_2)^2}{\|a_1\|^2 \|a_2\|^2}} = \\ &= \sqrt{\|a_1\|^2 \|a_2\|^2 - (a_1 \cdot a_2)^2} = \sqrt{(a_{11}^2 + a_{21}^2)(a_{12}^2 + a_{22}^2) - (a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})^2} = \\ &= \sqrt{a_{11}^2 a_{12}^2 + a_{11}^2 a_{22}^2 + a_{21}^2 a_{12}^2 + a_{21}^2 a_{22}^2 - a_{11}^2 a_{12}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22} - a_{21}^2 a_{22}^2} = \\ &= \sqrt{a_{11}^2 a_{22}^2 + a_{21}^2 a_{12}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{21}a_{22}} = \\ &= \sqrt{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})^2} = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = |\det(a_1, a_2)| \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, die Determinante entspricht der Fläche des Parallelogramms, welches von  $a_1$  und  $a_2$  aufgespannt wird.  $\square$ **Bemerkungen:**

1.) Achtung: aus der Eigenschaft ii) folgt, dass

$$\det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A).$$

2.) Die Determinante von  $2 \times 2$ -Matrizen ist ein Mass dafür, mit welchem Faktor eine Matrix eine bestimmte Fläche skaliert. Matrizen mit Determinante 1 beschreiben also genau diejenigen Abbildungen, bei welchen sich der Inhalt einer Fläche durch die Abbildung nicht ändert.

### Weitere Beispiele:

1) Die Matrix

$$D = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

hat die Determinante

$$\det(D) = \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

Es handelt sich bei der Matrix  $D$  um eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn mit Drehwinkel  $\alpha$ . Und eine Drehung ändert natürlich den Flächeninhalt nicht.

2) Was passiert nun, wenn wir die Matrix  $D$  vom vorherigen Beispiel mit der Matrix  $M$  vom letzten Beispiel multiplizieren? Wir bekommen

$$N := MD = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(\alpha) & -3\sin(\alpha) \\ -2\sin(\alpha) & -2\cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante ist dann nicht so überraschend

$$\det(N) = \begin{vmatrix} 3\cos(\alpha) & -3\sin(\alpha) \\ -2\sin(\alpha) & -2\cos(\alpha) \end{vmatrix} = -6\cos^2(\alpha) - 6\sin^2(\alpha) = -6(\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)) = -6$$

Das heisst, es ist  $\det(N) = \det(M \cdot D) = \det(M) \cdot \det(D)$ . Die Determinante eines Matrixproduktes, ist das Produkt der beiden Determinanten.

### 3.6.2 Die Determinante von $3 \times 3$ -Matrizen

Nun wollen wir die Determinante für  $3 \times 3$ -Matrizen analog zur Determinante von  $2 \times 2$ -Matrizen definieren. Das heisst, der Betrag der Determinante einer  $3 \times 3$ -Matrix soll dem Volumeninhalte entsprechen, welcher von den drei (drei-dimensionalen) Spaltenvektoren aufgespannt wird.

#### Definition 3.6.3 (Determinante für $3 \times 3$ -Matrizen)

Für eine  $3 \times 3$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{3 \times 3},$$

gebildet aus den drei Spaltenvektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix},$$

definieren wir die Determinante

$$\det(A) \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \det(a_1, a_2, a_3) := (a_1 \times a_2) \cdot a_3.$$

Analog zum zweidimensionalen Fall gilt für die Determinante der Satz:

#### Satz 3.6.4

- i)  $\det(\mathbb{1}_3) = \det(e_1, e_2, e_3) = 1$ .
- ii)  $\det : \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \times \mathbb{K}^3 \rightarrow \mathbb{K}$  ist eine sogenannte **3-Form** (trilinear und alternierend).
- iii) Für reelle  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^3$  entspricht  $|\det(a_1, a_2, a_3)|$  dem Volumen des von  $a_1, a_2$  und  $a_3$  aufgespannten Spats.

*Beweis.* i) Die Definition des Vektorproduktes liefert  $e_1 \times e_2 = e_3$ . Deshalb ist

$$\det(e_1, e_2, e_3) = (e_1 \times e_2) \cdot e_3 = e_3 \cdot e_3 = 1.$$

ii) Wir verzichten hier darauf, diese Eigenschaft zu beweisen.

iii) Diese Eigenschaften haben wir bereits im Abschnitt 2.3.4 behandelt. □



### 3.6.3 Determinante von $n \times n$ -Matrizen

Die Determinante für beliebige Matrizen wird so definiert, dass die bekannten Eigenschaften aus den Sätzen 3.6.2 und 3.6.4 gültig bleiben.

#### Definition 3.6.5 (Determinante für $n \times n$ -Matrizen)

Für eine  $n \times n$ -Matrix  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  bestehend aus den Spaltenvektoren  $a_i$  definieren wir die Determinante als Funktion  $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$  mit folgenden Eigenschaften:

i) Die Determinante ist normiert:  $\det(\mathbb{1}_n) = 1$ .

ii) Die Determinante ist multilinear:

$$\begin{aligned} \det(a_1, \dots, a_i + \tilde{a}, \dots, a_n) &= \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, \tilde{a}, \dots, a_n), \quad \forall a_i, \tilde{a} \in \mathbb{K}^n, \\ \det(a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n) &= \lambda \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \quad \forall a_i \in \mathbb{K}^n, \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

iii) Die Determinante ist alternierend:

$$\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n), \quad \forall a_i \in \mathbb{K}^n, \forall i \neq j \in \{1, \dots, n\}.$$

Man kann beweisen, dass es nur eine einzige Abbildung gibt, welche die drei geforderten Eigenschaften der Definition 3.6.5 erfüllen kann. Somit ist klar, dass es für quadratische Matrizen die Determinante auch wirklich gibt. Wir können sie aber für Matrizen mit mehr als drei Zeilen und Spalten noch nicht ausrechnen.<sup>5</sup> Dafür müssen wir zuerst ein Rezept finden. Ein erster Schritt ist der folgende Satz:

#### Satz 3.6.6 (Laplacescher Entwicklungssatz)

Für  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gilt:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad (\text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte}), \\ \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A_{ij}) \quad (\text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile}) \end{aligned}$$

wobei  $A_{ij}$  die  $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix von  $A$  ist, die durch Streichen der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte entsteht.

Diese Entwicklung ist dann besonders einfach und schnell zu rechnen, falls die Matrix viele Nullen als Einträge hat (sogenannt dünnbesetzte Matrizen).

#### Beispiel:

Wir berechnen nochmals die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

wir entwickeln nach der 3. Zeile:

$$\det(A) = (-1)^{3+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-6) + (-1) \cdot (-1) \cdot 34 = 16.$$

Eine direkte Folge des Entwicklungssatzes von Laplace ist die folgende Eigenschaft:

#### Satz 3.6.7

Die Determinante einer oberen, unteren Dreiecksmatrix oder einer Diagonalmatrix ist das Produkt ihrer Diagonalelemente, d. h.

$$\det(A) = \prod_{k=1}^n a_{kk} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

<sup>5</sup>Die Tatsache, dass man die Existenz und Eindeutigkeit von etwas zwar beweisen kann, man aber trotzdem dieses Etwas nicht ausrechnen kann, ist ein Ungemach, das in der Mathematik leider häufig vorkommt.

Das bedeutet, wenn wir eine Matrix in eine Dreiecksform umwandeln können, ohne dass wir dabei ihre Determinante ändern, dann haben wir einen Algorithmus zur Berechnung der Determinante gefunden, weil wir dann nur das Produkt der Diagonalelemente nehmen müssen. Wir können ja bereits eine Matrix in eine Dreiecksform (Zeilenstufenform) umwandeln, nämlich durch die elementaren Zeilenoperationen, welche wir beim Gauss-Algorithmus und der  $LU$ -Zerlegung kennengelernt haben. Aber ändern diese Operationen die Determinante nicht? Tatsächlich ist aufgrund der Multilinearitätseigenschaft der Determinante (Def. 3.6.5) klar, dass man elementare Spaltenoperation an einer Matrix ausführen kann, ohne ihre Determinante zu ändern. Wie sieht es mit elementaren Zeilenoperationen aus? Die Antwort liefert der folgende Satz:

**Satz 3.6.8**

Für  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gilt:  $\det(A^T) = \det(A)$ .

Aufgrund von Satz 3.6.8 ist klar, dass wir nicht nur elementare Spaltenoperationen, sondern auch Zeilenoperationen machen dürfen, ohne dabei die Determinante zu ändern. Weiter halten wir noch fest, wie es sich mit der Determinante eines Matrixproduktes verhält:

**Satz 3.6.9**

Seien  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Dann gilt:  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ .

Die Eigenschaften aus aus der Definition der Determinante sowie die Sätze 3.6.7, 3.6.8 und 3.6.9 liefern schliesslich einen einfach durchzuführenden Algorithmus für die Berechnung der Determinanten. Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine beliebige  $n \times n$ -Matrix,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dann geht man für die Berechnung der Determinante von  $A$  wie folgt vor:

- 1) Man führe für  $A$  die  $LU$ -Zerlegung durch, wobei man

$$U = \begin{pmatrix} \boxed{\tilde{a}_{11}} & * & \cdots & * \\ 0 & \boxed{\tilde{a}_{22}} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\tilde{a}_{nn}} \end{pmatrix}$$

erhält. Aus der  $LU$ -Zerlegung  $PA = LU$  folgt

$$\det(P) \det(A) = \det(L) \det(U).$$

Wegen Satz 3.6.7 ist  $\det(L) = 1$  und

$$\det(U) = \prod_{k=1}^n \tilde{a}_{kk}.$$

Für die Determinante von  $U$  sind also nur die Pivotelemente von Belang. Doch was ist mit  $\det(P)$ ? Es gilt stets  $\det(P) = \pm 1$ . Das Vorzeichen hängt von der Anzahl Zeilenvertauschungen ab. Es ist also bei der  $LU$ -Zerlegung "Buch zu führen", wie oft Zeilen vertauscht werden.

- 2) Wurden bei der  $LU$ -Zerlegung  $i$  Vertauschungen von Zeilen vorgenommen, dann erhalten wir die Determinante aus der Formel

$$\det(A) = (-1)^i \det(U) = (-1)^i \prod_{k=1}^n \tilde{a}_{kk}. \tag{3.1}$$

Schliesslich halten wir noch den folgenden wichtigen Zusammenhang zwischen der Determinante und dem Rang einer Matrix fest.

**Satz 3.6.10**

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Es gilt die folgende Äquivalenz:

$$\text{rang}(A) = n \iff \det(A) \neq 0$$

## 3.7 Die Inverse einer Matrix

### 3.7.1 Definition und Eigenschaften

#### Definition 3.7.1 (Reguläre/Invertierbare Matrizen)

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine  $n \times n$ -Matrix.

- i)  $A$  heisst **regulär**, falls  $\text{rang}(A) = n$ . Eine Matrix, welche nicht regulär ist, heisst **singulär**.
- ii)  $A$  heisst **invertierbar**, falls eine Matrix  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  existiert, sodass  $B \cdot A = \mathbb{1}_n$ . Die Matrix  $B$  heisst dann die zu  $A$  inverse Matrix und man schreibt  $A^{-1} := B$ .

#### Lemma 3.7.2

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  invertierbar. Dann gilt:

- i) Wenn  $A^{-1}$  die inverse Matrix von  $A$  ist, dann gilt  $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathbb{1}_n$ . Das heisst,  $A$  und  $A^{-1}$  kommutieren.
- ii) Die Inverse  $A^{-1}$  ist eindeutig. Eine Matrix  $A$  kann nicht zwei verschiedene Inversen haben.

*Beweis.* i) Der Beweis ist tatsächlich nicht ganz trivial. Wir starten mit

$$A = A \cdot \mathbb{1}_n = A \cdot (A^{-1} \cdot A) = (A \cdot A^{-1}) \cdot A$$

Die Gleichung ist äquivalent zu

$$A - (A \cdot A^{-1}) \cdot A = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbb{1}_n - A \cdot A^{-1}) \cdot A = 0,$$

wobei wir das Distributivgesetz verwendet haben. Weil aber  $\text{rang}(A) = n$  ist, kann das lineare Gleichungssystem der letzten Gleichung keine Lösung haben. Daher muss

$$\mathbb{1}_n - A \cdot A^{-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}_n.$$

- ii) Seien  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $C \in \mathbb{K}^{n \times n}$  zwei verschiedene Matrizen, welche beide invers zu  $A$  sind. Also:

$$BA = CA = \mathbb{1}_n.$$

Multiplikation mit  $B$  von rechts liefert

$$\begin{aligned} BA &= CA \\ \Leftrightarrow BAB &= CAB \\ \Leftrightarrow B(AB) &= C(AB) \\ \Leftrightarrow B\mathbb{1}_n &= C\mathbb{1}_n \\ \Leftrightarrow B &= C \end{aligned}$$

wobei wir die Eigenschaft i) verwendet haben. Das heisst, es kann nur eine inverse Matrix geben, weil wir bewiesen haben, dass wenn es zwei solche Matrizen gäbe, sie dann automatisch gleich sein müssen.  $\square$

Nun ist mal zumindest klar, dass für eine invertierbare Matrix  $A$ , ihre inverse Matrix  $A^{-1}$  eindeutig ist und es gilt dann

$$A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}_n.$$

Was kann man darunter verstehen, wenn man die Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  – wie wir das in vorherigen Abschnitten getan haben (siehe Abschnitt 3.2) – als Abbildung auffasst?

Die Matrix  $A$  ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} A : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\longmapsto y = Ax \end{aligned}$$

Das Produkt  $A^{-1}A$  ist die Hintereinanderschaltung der Abbildungen  $A^{-1}$  nach  $A$ , also

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A^{-1}} & \mathbb{K}^n \\ x \mapsto y = Ax & & & & \mapsto z = A^{-1}y = A^{-1}Ax = \mathbb{1}_n x = x. \end{array}$$

Das ist ganz genau gleich, wie für andere Funktionen mit ihren Umkehrfunktionen. Z.B. ist die Umkehrung von  $\sin$  der  $\arcsin$  und es gilt:

$$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \text{und} \quad \sin(\arcsin(x)) = x$$

Ein weiteres Beispiel für eine Funktion mit ihrer Umkehrfunktion ist  $e^x$  und  $\ln(x)$ :

$$\ln(e^x) = x \quad \text{und} \quad e^{\ln(x)} = x$$

Weiter halten wir für invertierbare Matrizen folgende Eigenschaften fest:

**Satz 3.7.3**

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  invertierbar. Dann gilt:

- i)  $(A^{-1})^{-1} = A$ ,
- ii)  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$
- iii)  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
- iv) Seien  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  beide invertierbar. Dann ist auch  $AB$  invertierbar und es gilt:  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .

*Beweis.* Wir beweisen hier die beiden letzten Eigenschaften:

iii)

$$\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n^T = (AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T,$$

wobei wir iv) verwendet haben. Aus  $(A^{-1})^T A^T = \mathbb{1}_n$  folgt die Behauptung.

iv) Wenn  $A$  und  $B$  invertierbare Matrizen sind, dann können wir  $A^{-1}A = \mathbb{1}_n$  und  $BB^{-1} = \mathbb{1}_n$  schreiben. Gleichsetzen liefert dann  $A^{-1}A = BB^{-1}$ . Diese Gleichung multiplizieren wir zuerst von links mit  $B^{-1}$  und dann von rechts mit  $B$ . Dies ergibt nacheinander:

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= BB^{-1} \\ \Rightarrow B^{-1}A^{-1}A &= B^{-1}BB^{-1} \\ \Rightarrow B^{-1}A^{-1}AB &= B^{-1}BB^{-1}B \\ \Rightarrow B^{-1}A^{-1}AB &= \mathbb{1}_n \mathbb{1}_n \\ \Rightarrow (B^{-1}A^{-1})(AB) &= \mathbb{1}_n. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besagt aber nichts anderes, als dass  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ . □

Welche Matrizen besitzen nun eine Inverse und welche nicht? Und wenn eine inverse Matrix existiert, wie berechnet man diese? Diese Fragen wollen wir im nächsten Unterabschnitt angehen.

### 3.7.2 Berechnung der inversen Matrix (Gauss-Jordan-Algorithmus)

Wir nehmen eine gegebene quadratische Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und versuchen ihre Inverse zu berechnen. Wir suchen also eine Matrix  $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ , sodass  $A \cdot B = \mathbb{1}_n$ . In Komponenten ausgeschrieben lautet dies:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun die Gleichungen, in denen die  $k$ -te Spalte von  $B$  vorkommt:

$$\begin{aligned} a_{11}b_{1k} + a_{12}b_{2k} + \cdots + a_{1n}b_{nk} &= 0 \\ a_{21}b_{1k} + a_{22}b_{2k} + \cdots + a_{2n}b_{nk} &= 0 \\ &\vdots \\ a_{k1}b_{1k} + a_{k2}b_{2k} + \cdots + a_{kn}b_{nk} &= 1 \\ &\vdots \\ a_{n1}b_{1k} + a_{n2}b_{2k} + \cdots + a_{nn}b_{nk} &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem für die  $k$ -te Spalte  $(b_{1k}, \dots, b_{nk})$  von  $B$ . Insgesamt haben wir also  $n$  lineare Gleichungssysteme (mit je  $n$  Gleichungen) für die  $n$  Spalten von  $B$  zu lösen. Dies können wir mit dem Gauss-Algorithmus in einem Schritt ausführen. Wir führen also den Gauss-Algorithmus an folgender erweiterter Koeffizientenmatrix durch:

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}$$

Bevor wir dies jedoch tun, überlegen wir uns, unter welchen Bedingungen diese  $n$  linearen Gleichungssysteme eine eindeutige Lösung haben. Nur in diesem Fall bekommen wir nämlich eine eindeutige inverse Matrix  $B$ , also nur dann ist die Matrix  $A$  wirklich invertierbar. Da es sich um lineares Gleichungssystem mit  $n$  Gleichungen und  $n$  Unbekannten handelt, ist der Rang von  $A$  das dafür entscheidende Kriterium. Ist  $\text{rang}(A) = n$  finden wir eine eindeutige Lösung und sonst gibt es gar keine Lösung. Wir schliessen daraus den folgenden wichtigen Zusammenhang:

**Satz 3.7.4**

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ .  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $A$  regulär ist.

**Definition 3.7.5 (Allgemeine lineare Gruppe)**

Die Menge aller regulären (also invertierbaren) Matrizen bezeichnet man als allgemeine lineare Gruppe (General Linear Group):

$$GL(n, \mathbb{K}) := \left\{ A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \text{rang}(A) = n \right\}.$$

Nun fahren wir mit der Berechnung der inversen Matrix fort. Nach dem gewöhnlichen Gauss-Algorithmus hat das Gleichungssystem die Form:

$$\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \cdots & \tilde{b}_{1n} \\ 0 & \boxed{1} & & \vdots & \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \cdots & \tilde{b}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \tilde{a}_{n-1,n} & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & \tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{n2} & \cdots & \tilde{b}_{nn} \end{array}$$

wobei wir die Pivotelemente auf 1 normiert haben. Jetzt könnten wir die Gleichungssysteme prinzipiell durch Rückwärtseinsetzen lösen. Der hier vorgestellte Gauss-Jordan Algorithmus geht jedoch folgendermassen weiter: mit Hilfe von weiteren Zeilenoperationen werden auch die Elemente  $\tilde{a}_{ij}$  oberhalb der Pivotelemente auf 0 gebracht. Für diesen Prozess geht man wie folgt vor:

- i) Im 1. Schritt addiert man zur  $i$ -ten Zeile  $-\tilde{a}_{in}$  mal die  $n$ -te Zeile. Dies macht man für alle Zeilen  $i = 1, \dots, n - 1$ . Damit bekommen wir die Form

$$\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & \bar{a}_{12} & \cdots & 0 & \bar{b}_{11} & \bar{b}_{12} & \cdots & \bar{b}_{1n} \\ 0 & \boxed{1} & & \vdots & \bar{b}_{21} & \bar{b}_{22} & \cdots & \bar{b}_{2n} \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & \bar{b}_{n1} & \bar{b}_{n2} & \cdots & \bar{b}_{nn} \end{array}$$

mit lauter Nullen oberhalb des untersten Pivotelements.

- ii) Im 2. Schritt verfahren wir gleich. Wir addieren  $-\bar{a}_{i,n-1}$  mal die  $(n - 1)$ -te Zeile zur  $i$ -ten Zeile für  $i = 1, \dots, n - 2$ . Dies liefert uns die Nullen oberhalb des zweituntersten Pivotelement.
- iii) Am Ende erhält man dann eine Form der linearen Gleichungssysteme mit der Einheitsmatrix auf der linken Seite:

$$\begin{array}{cccc|cccc} \boxed{1} & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \boxed{1} & & \vdots & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{1} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}$$

Die Matrix auf der rechten Seite ist die gesuchte Inverse  $A^{-1}$ .

Dieser Algorithmus zur Berechnung der Inversen wird als **Gauss-Jordan** Algorithmus bezeichnet. Er besteht also vereinfacht gesagt darin, die Matrix  $A$  mittels Zeilenoperationen in die Einheitsmatrix  $\mathbb{K}_n$  zu überführen, wobei die rechte Seite aus der Einheitsmatrix in die gesuchte inverse Matrix  $A^{-1}$  überführt wird. Wir wollen den Algorithmus anhand zweier Beispiele üben:

**Beispiele** (zum Gauss-Jordan-Algorithmus):

i) Wir berechnen die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Der erste Teil funktioniert wie der "normale" Gauss-Algorithmus mit dem Zusatz, dass man die Pivotelemente auf 1 normiert:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{cc|cc} 5 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \end{array} \\ \\ \longrightarrow \begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{29}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{29} & \frac{5}{29} \end{array} \end{array}$$

Nun müssen wir auch oberhalb der Pivotelemente durch Zeilenoperationen Nullen erzeugen. In diesem Beispiel geschieht das, indem man von der 1. Zeile  $5/2$  mal die 2. subtrahiert:

$$\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{29} & \frac{5}{29} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 0 & \frac{7}{29} & -\frac{2}{29} \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{3}{29} & \frac{5}{29} \end{array}.$$

Man bekommt also als inverse Matrix von  $A$  die Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Zur Kontrolle überprüfen wir unser erhaltenes Resultat:

$$A^{-1}A = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 29 & 0 \\ 0 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

ii) Betrachte als weiteres Beispiel die  $3 \times 3$ -Matrix

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein Beispiel für eine **orthogonale** Matrix, denn ihre Spalten sind paarweise senkrecht aufeinander und haben ausserdem alle die Länge 1. Der Gauss-Jordan-Algorithmus ist hier relativ einfach und besteht nur aus einer Zeilenvertauschung und einer Vorzeichenänderung in einer Zeile:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \\ \\ \longrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{array}$$

Die Inverse ist also

$$O^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

was gerade der an der Hauptdiagonalen gespiegelten (=transponierten) Matrix  $O$  entspricht. Dass ist immer (und nur) der Fall für orthogonale Matrizen.

### Bemerkungen:

- Die inverse Matrix kann zur Lösung von linearen Gleichungssystemen verwendet werden. Ist nämlich  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  und  $b \in \mathbb{K}^n$  ein Vektor. Dann hat das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  genau eine Lösung und diese Lösung ist dann gegeben durch  $x = A^{-1}b$ . Es ist allerdings nicht zu empfehlen, lineare Gleichungssysteme durch das Berechnen der inversen Matrix zu lösen. Die Berechnung der Inversen ist aufwendig und kann auch numerisch problematisch sein. In gewissen Fällen kann es aber sein, dass die inverse Matrix schon bekannt ist.
- Für  $2 \times 2$ -Matrizen kann man relativ leicht die inverse Matrix direkt hinschreiben. Für

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

erhält man

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

für die inverse Matrix. Beim Term  $ad - bc$  handelt es sich um die Determinante der Matrix  $A$ , welche für reguläre Matrizen niemals null ist.

### Aufgaben:

Berechnen Sie von den folgenden Matrizen die Inverse, sofern die Matrizen regulär sind.

1.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Lösungen zu den Aufgaben:

1. Wir verwenden den "Trick" für die Berechnung der Inversen von  $2 \times 2$ -Matrizen:

$$A^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 5 - (-1) \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Kontrolle:

$$A^{-1}A = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_2$$

2. Wir führen den Gauss-Jordan-Algorithmus durch:

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \\ \\ \longrightarrow & \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -2 & 1 \end{array} \\ \\ \longrightarrow & \begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \\ \\ \longrightarrow & \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{array} \end{array}$$

Es folgt, dass

$$B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Kontrolle:

$$B^{-1}B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}_3$$

# Kapitel 4

## Komplexe Zahlen und Funktionen

Komplexe Zahlen sind wie Sushi.  
Sie schauen komisch aus, aber  
man kommt auf den Geschmack.

---

Eugene Trubowitz

Im Abschnitt 1.2 haben wir die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  bereits kennengelernt. Wir haben sie als Einträge in Vektoren und Matrizen, sowie als Körper in  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen benutzt. Dazu genügten uns die Grundrechenoperationen  $+$  und  $\cdot$ , sowie einige Begriffe wie die komplex Konjugierte und die geometrische Darstellung von  $\mathbb{C}$  als Gauss'sche Zahlenebene. In diesem Kapitel werden wir die komplexen Zahlen vertieft behandeln. Wir möchten z.B. aus einer komplexen Zahl  $z \in \mathbb{C}$  auch Ausdrücke wie

$$z^{1/n} \quad e^z \quad \sin(z) \quad \ln(z)$$

ausrechnen können. Dies führt uns natürlich dazu, auch den Funktionsbegriff auf  $\mathbb{C}$  zu erweitern. Dadurch wiederum werden wir zusätzliche Bezüge zwischen bekannten Funktionen herleiten können, die sich – betrachtet man nur die reellen Zahlen – nicht zeigen. Schliesslich werden wir auch einige Anwendungen der komplexen Zahlen behandeln.

### 4.1 Exponentialform von komplexen Zahlen

#### 4.1.1 Die Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$

##### Definition 4.1.1 (Exponentialfunktion)

Für beliebiges  $z \in \mathbb{C}$  definieren wir die Exponentialfunktion durch:

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \exp(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}. \end{aligned}$$

Die Eulersche Zahl  $e$  ist dann definiert durch

$$e := \exp(1).$$

##### Bemerkungen:

- i) Die Definition 4.1.1 der Exponentialfunktion über eine (unendliche) Reihe macht natürlich nur dann Sinn, wenn die Reihe auch konvergent ist, d.h. die Summation muss einen endlichen Wert ergeben. Die Konvergenz der Exponentialreihe zeigt man mit dem sogenannten **Quotientenkriterium**. Für die Exponentialreihe,

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

gilt nämlich

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \rightarrow 0 < 1 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Daraus folgt, dass die Exponentialreihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  konvergiert.

ii) Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

wobei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}$  eine beliebige Zahlenfolge ist und  $z \in \mathbb{C}$ , nennt man eine **Potenzreihe**. Viele Funktionen, darunter sehr wichtige wie z.B. eben die Exponentialfunktion, lassen sich auf ihrem Definitionsbereich als Potenzreihe schreiben, also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Solche Funktionen nennt man **analytisch**. Insbesondere sind alle analytische Funktionen **glatt**.<sup>1</sup> Glatte Funktionen wiederum sind natürlich auch stetig.

iii) Was hat die so definierte Funktion  $\exp$  mit “exponentiellem” Wachstum oder Zerfall zu tun? Von einem exponentiellem Wachstum oder Zerfall spricht man, wenn die Änderungsrate einer Grösse (z.B. Geld auf dem Konto, radioaktive Teilchen oder Anzahl Bakterien in einer Probe) proportional zur Anzahl der Grösse selbst ist. Eine solche Funktion – nennen wir sie  $f(t)$  – erfüllt also die Gleichung

$$\frac{df}{dt}(t) = \alpha f(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dies ist eine Differentialgleichung, weil in der Gleichung die Ableitung der gesuchten Funktion vorkommt. In der Tat lässt sich leicht zeigen, dass die Exponentialfunktion diese Gleichung erfüllt. Das Ableiten einer Potenzreihe ist nämlich einfach, man darf Glied für Glied einzeln ableiten (Summenregel):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\exp(t)] &= \frac{d}{dt} \left( 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + \dots \right) = \\ &= 0 + 1 + \frac{2t}{2} + \frac{3t^2}{6} + \frac{4t^3}{24} + \dots = \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots = \exp(t). \end{aligned}$$

Etwas genauer:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\exp(\alpha t)] &= \frac{d}{dt} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left( \frac{\alpha^k t^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{d}{dt} (t^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} k t^{k-1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k k t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^k t^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha (\alpha t)^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha \frac{(\alpha t)^l}{l!} = \alpha \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^l}{l!} = \alpha \exp(\alpha t). \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Ableitung der Exponentialfunktion wieder die Exponentialfunktion ist.

Aus der Definition der Eulerschen Zahl  $e$  wird nicht direkt klar, wie gross  $e$  eigentlich ist und auch nicht, ob  $e$  rational oder irrational ist. Die Zahl  $e$  kann aber natürlich mit der Potenzreihe näherungsweise berechnet werden:

$$e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots \approx 2.71828$$

Aus der näherungsweisen Berechnung darf man jedoch nicht schliessen, dass  $e$  rational ist. Dies kann man nämlich sogar widerlegen, was der folgende Satz zeigt:

**Satz 4.1.2**

Die Eulersche Zahl  $e$  ist irrational, also  $e \notin \mathbb{Q}$ .

*Beweis.* Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Es gilt:

$$n!e = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!} + R. \tag{4.1}$$

<sup>1</sup> “Glatt” heisst “unendlich oft differenzierbar”, glatte Funktionen kann man also beliebig oft ableiten. Die Menge der glatten Funktionen wird mit dem Symbol  $C^\infty$  bezeichnet.

Den Restterm  $R$  schätzen wir nun ab. Es gilt:

$$\begin{aligned} 0 < R &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+l)!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \\ &< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots = \frac{1}{n} < 1, \end{aligned}$$

wobei wir zuletzt die Formel für die geometrische Reihe verwendet haben. Somit haben wir nun gezeigt, dass der Restterm  $R$  zwischen null und eins liegt, d.h.  $R \notin \mathbb{Z}$ . Der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (4.1) dagegen ist ganzzahlig. Das heisst aber wiederum, dass  $n!e$  nicht ganzzahlig sein kann. Und dies trifft für jedes  $n \geq 2$  zu. Da aber  $n!$  eine natürliche Zahl ist folgt, dass  $e \notin \mathbb{Q}$ .  $e$  ist also irrational.  $\square$

**Satz 4.1.3**

Für beliebige  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  gilt:

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2).$$

**Bemerkung:**

Es gibt noch eine weitere Schreibweise für die Exponentialfunktion. Diese Schreibweise basiert auf einem Grenzwert und sei der Vollständigkeit halber hier noch erwähnt: Für beliebiges  $z \in \mathbb{C}$  gilt

$$\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Wir haben die Exponentialfunktion  $\exp$  über eine unendliche Reihe definiert und die Eulersche Zahl ist definiert durch  $\exp(1)$ . Die Exponentialfunktion  $\exp(x)$  hat bekanntlich etwas mit der Potenz  $e^x$  zu tun, also mit der  $x$ -ten Potenz der Eulerschen Zahl  $e$  als Basis. Wo kommt denn diese Beziehung her? Den Zusammenhang stellt folgender Satz her:

**Satz 4.1.4**

Für eine rationale Zahl  $r \in \mathbb{Q}$  gilt:

$$\exp(r) = e^r$$

Bevor wir diese Identität beweisen, überlegen wir uns zuerst kurz, was die beiden Seiten der Gleichung bedeuten. Die linke Seite ist die Exponentialreihe, also gemäss 4.1.1 gegeben durch

$$\exp(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^k}{k!}.$$

Die rechte Seite dagegen ist die Potenz  $e^r$ , wobei  $r$  eine rationale Zahl ist. Eine rationale Zahl kann immer als Bruch,

$$r = \frac{p}{q},$$

geschrieben werden, wobei  $p \in \mathbb{Z}$  eine ganze Zahl und  $q \in \mathbb{N}$  eine natürliche Zahl ist. Somit ist klar, dass mit der rechten Seite

$$e^r = \sqrt[q]{e^p}$$

gemeint ist. Beweisen wir nun also den obigen Satz:

*Beweis.* Zuerst beweist man den Satz für ausschliesslich ganzzahlige  $r \in \mathbb{Z}$  mit Hilfe von vollständiger Induktion. Die Behauptung des Satzes ist sicher wahr für  $r = 1$ , denn

$$\exp(1) = e = e^1$$

(Induktionsbasis). Wenn nun die Behauptung für ein beliebiges  $r \in \mathbb{Z}$  richtig ist (Induktionsannahme), dann gilt

$$\begin{aligned} \exp(r + 1) &= \exp(r) \exp(1) = e^r e^1 = e^{r+1}, \\ \exp(r - 1) &= \exp(r) \exp(-1) = e^r e^{-1} = e^{r-1}. \end{aligned}$$

Das heisst die Behauptung stimmt dann auch für  $r + 1$  und  $r - 1$  (Induktionsschritt). Der Satz ist also für  $r \in \mathbb{Z}$  bewiesen. Sei nun aber  $r = \frac{p}{q}$  mit  $p \in \mathbb{Z}$  und  $q \in \mathbb{N}$ . So gilt aufgrund des soeben Bewiesenen:

$$\begin{aligned} (\exp(r))^q &= \underbrace{\exp(r) \exp(r) \cdots \exp(r)}_{q \text{ Faktoren}} = \exp(\underbrace{r + r + \cdots + r}_{q \text{ Summanden}}) \\ &= \exp\left(\underbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \cdots + \frac{p}{q}}_{q \text{ Summanden}}\right) = \exp(p) = e^p. \end{aligned}$$

Da in der letzten Gleichung beide Seiten positiv sind, dürfen wir auf beiden Seiten die  $q$ -te Wurzel ziehen:

$$\exp(r) = (e^p)^{1/q} = e^{p/q} = e^r,$$

was den Satz auch für rationales  $r \in \mathbb{Q}$  beweist. □

Mit dem obigen Satz lässt sich nun bereits  $\exp(r)$  für rationale Zahlen  $r \in \mathbb{Q}$  ausrechnen, nämlich über die Potenz  $e^r$ . Was ist nun aber  $e^z$  für  $z \notin \mathbb{Q}$ , also z.B.  $e^{\sqrt{2}}$  oder sogar  $e^i$ ? Satz 4.1.4 legt es nahe, auch für beliebige komplexe Zahlen  $z \in \mathbb{C}$  die Potenz  $e^z$  mit der Exponentialreihe  $\exp(z)$  zu identifizieren. Das heisst, während für  $z \in \mathbb{Q}$  die Gleichheit von  $e^z$  und  $\exp(z)$  erwiesen ist, definieren wir diese Gleichheit für alle anderen  $z \in \mathbb{C}$ :

#### Definition 4.1.5

Für ein beliebiges  $z \in \mathbb{C}$  definieren wir  $e^z := \exp(z)$ .

### 4.1.2 Die Eulersche Formel

Wir sind uns nun darüber im Klaren, wie  $e^z$  definiert ist, nämlich über die Exponentialreihe. Das erklärt uns aber noch nicht, wie man den Real- und Imaginärteil von  $e^z$  berechnen könnte. Sei also  $z = s + it$  eine beliebige komplexe Zahl. Dann ist

$$e^z = e^{s+it} = e^s e^{it}.$$

Mit dem ersten Faktor  $e^s$  haben wir keinerlei Probleme, dieser ist eine ganz normale Potenz mit einem reellen Exponenten  $s$  und somit ist auch  $e^s \in \mathbb{R}$ . Aber was ist mit  $e^{it}$ ? Der Berechnung von Real- und Imaginärteil dieses Ausdrucks wollen wir uns nun zuwenden.

Zuerst möchten wir einmal den Betrag von  $e^{it}$  ausrechnen. Laut der Definition des Betrages ist

$$|e^{it}| = \sqrt{e^{it} \overline{e^{it}}}.$$

Um die komplex konjugierte Zahl unter der Wurzel berechnen zu können, halten wir zuerst folgendes fest:

$$\overline{e^z} = \overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z^k}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^k}{k!} = e^{\overline{z}}.$$

Somit erhalten wir für eine beliebige reelle Zahl  $t \in \mathbb{R}$ :

$$|e^{it}| = \sqrt{e^{it} \overline{e^{it}}} = \sqrt{e^{it} e^{-it}} = \sqrt{e^{it} e^{-it}} = \sqrt{e^{it-it}} = \sqrt{e^0} = \sqrt{1} = 1,$$

das heisst

$$|e^{it}| = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Die Zahl  $e^{it}$ , deren Real- und Imaginärteil wir suchen, liegt also auf dem Einheitskreis in der komplexen Ebene, also in der Menge

$$S^1 := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \right\}.$$

Wenigstens dies wissen wir schon mal. Jetzt fehlt uns jedoch noch der Polarwinkel von  $e^{it}$ , also wo auf dem Einheitskreis liegt  $e^{it}$ ? Die Antwort darauf liefert die berühmte **Eulersche Formel**:

#### Satz 4.1.6 (Eulersche Formel)

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl  $e^{it}$  sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(e^{it}) &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \cos(t), \\ \operatorname{Im}(e^{it}) &= \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin(t).\end{aligned}$$

oder anders ausgedrückt die komplexe Zahl  $e^{it}$  lautet in kartesischer Form:

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t).$$

### Definition 4.1.7 (cis-Funktion)

Für eine reelle Zahl  $t \in \mathbb{R}$  definieren wir die sogenannte cis-Funktion durch

$$\begin{aligned}\operatorname{cis} : \mathbb{R} &\longrightarrow S^1 \\ \operatorname{cis}(t) &:= e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)\end{aligned}$$

### Bemerkungen:

- i) Der Name “cis” für diese Funktion ist eine Abkürzung für “cosinus plus i mal sinus”.
- ii) Die Abbildung cis bildet die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  (stetig) auf den Einheitskreis ab  $S^1$  in der komplexen Ebene ab.

Hier müssen wir nun kurz innehalten und uns fragen, was die Eulerschen Formeln genau bedeuten. Wir sind davon ausgegangen, dass wir Real- und Imaginärteil von  $e^{it}$  bestimmen wollen. Die Eulerschen Formeln besagen, dass die gesuchten Real- und Imaginärteile die uns vertrauten Funktionen  $\cos(t)$  und  $\sin(t)$  sind. Und das stellt sich auch wirklich so heraus. Es ist uns gelungen<sup>2</sup> über die komplexen Zahlen eine Verbindung von der Exponentialfunktion zu den trigonometrischen Funktionen  $\cos$  und  $\sin$  herzustellen. Diese Erkenntnis war im 18. Jahrhundert ziemlich revolutionär. Die Funktionen Cosinus und Sinus wurden lange vor der Entdeckung der Exponentialfunktion in der Geometrie eingeführt. Bereits Archimedes kannte ein mit den Additionstheoremen verwandtes Theorem. Die systematische Beziehung zwischen den trigonometrischen Funktionen einerseits und der Exponentialfunktion andererseits hat jedoch Leonhard Euler erstmals systematisch beschrieben. Zur Erläuterung zitieren wir aus Eulers “Introductio in Analysin Infinitorum”:

*Post logarithmos et quantitates exponentiales considerari debent arcus circulares eorumque sinus et cosinus, quia non solum aliud quantitatum transcendentium genus constituunt, sed etiam ex ipsis logarithmis et exponentialibus, quando imaginariis involvuntur, proveniunt, id quod infra clarius patebit.*

Die Übersetzung davon lautet wie folgt: “Neben den Logarithmen und exponentiellen Grössen müssen Kreisbögen<sup>3</sup> und deren Sinus und Kosinus betrachtet werden. Dies nicht nur deshalb, weil sie (gemeint sind hier Kosinus und Sinus) eine weitere Art von transzendenten Grössen darstellen, sondern auch - was weiter unten klarer hervortreten wird - weil sie selbst aus logarithmischen und exponentiellen Grössen herrühren, sobald diese Logarithmen und Exponentialfunktionen aus imaginären Grössen gebildet werden.”

### Beweis der Eulerschen Formel

Der Beweis der Eulerschen Gleichungen fällt leider nicht vom Himmel, weshalb wir uns hier begnügen, einige Indizien zu sammeln, die  $\cos$  als den Realteil und  $\sin$  als den Imaginärteil von  $e^{it}$  entlarven. Wir führen also sozusagen einen Indizienbeweis. Für eine mathematisch stringente Beweisführung verweise ich auf das Buch Analysis 1 von Ch. Blatter (4. Auflage, Springer-Verlag, 1991) oder andere Standardwerke über Analysis.

#### 1. Indiz:

Ein 1. Indiz gewinnen wir aus der Tatsache, dass

$$1 = |e^{it}|^2 = |\cos(t) + i \sin(t)|^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t)$$

und das ist eine bereits bekannte Eigenschaft von  $\cos$  und  $\sin$ .

#### 2. Indiz:

Ein 2. Indiz bekommen wir durch das Herleiten der Ableitungen von  $\cos(t)$  und  $\sin(t)$ : Aus der Potenzreihenentwicklung von

$$e^{it} = \exp(it) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} = 1 + \frac{it}{1} - \frac{t^2}{2!} - \frac{it^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{it^5}{5!} - \frac{t^6}{6!} + \dots$$

<sup>2</sup>besser gesagt nicht uns, sondern dem Basler Mathematiker Leonhard Euler (1707-1783).

<sup>3</sup>Heute würde man sagen: Winkel im Bogenmass.

erhält man nämlich sogleich die Potenzreihen für den Sinus und den Cosinus:

$$\cos(t) = \operatorname{Re}(e^{it}) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin(t) = \operatorname{Im}(e^{it}) = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Diese Potenzreihen kann man relativ leicht ableiten (Glieder für Glieder):

$$\cos'(t) = 0 - \frac{2t}{2!} + \frac{4t^3}{4!} - \frac{6t^5}{6!} + \dots = -\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!}\right) = -\sin(t),$$

$$\sin'(t) = 1 - \frac{3t^2}{3!} + \frac{5t^4}{5!} - \dots = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \dots = \cos(t).$$

Das sind aber genau die korrekten Ableitungen, die wir aus der Analysis für  $\cos$  und  $\sin$  kennen. Die beiden eben erwähnten Indizes sollten uns genügen.

Wir wissen also jetzt, dass für ein beliebiges  $t \in \mathbb{R}$

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t).$$

Andererseits ist auch klar, dass die Zahl  $e^{it}$  einen Polarwinkel  $\varphi$  in der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$  besitzen muss (siehe Abb. 4.1). Es gilt also auch

$$e^{it} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

für einen bestimmten Polarwinkel  $\varphi$ . Daraus folgern wir, dass  $t$  und  $\varphi$  bis auf ein Vielfaches von  $2\pi$  dasselbe sein muss. Es muss also ein ganzzahliges  $k \in \mathbb{Z}$  geben, sodass

$$t = \varphi + k \cdot 2\pi.$$

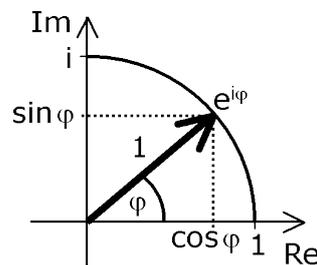


Abbildung 4.1: Komplexe Zahl auf dem Einheitskreis mit Realteil  $\cos$  und Imaginärteil  $\sin$ .

### Beispiele:

- i)  $e^{i\frac{\pi}{2}} = \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot 1 = i.$
- ii)  $e^{2\pi i} = \operatorname{cis}(2\pi) = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1 + 0 \cdot i = 1.$
- iii)  $e^{i\pi} = \operatorname{cis}(\pi) = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 + 0 \cdot i = -1.$  Diese Gleichung gilt als eine der schönsten Gleichungen der ganzen Mathematik. Schreibt man sie noch etwas um, nämlich so:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

dann kommen alle wichtigen Zahlen der Mathematik,  $0$ ,  $1$ ,  $\pi$ ,  $e$  und  $i$  darin vor. Wahrlich ein Hingucker!

- iv)  $e^{i\frac{3\pi}{2}} = \operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot (-1) = -i.$
- v)  $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + i \cdot (-1) = -i.$

### 4.1.3 Argument einer komplexen Zahl

Die letzten beiden Beispiele zeigen, dass die cis-Funktion auf dem ganzen Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  nicht eindeutig (d.h. nicht injektiv) ist. Die zwei Zahlen  $-\pi/2$  und  $3\pi/2$  werden von der Funktion cis auf den selben Punkt auf dem Einheitskreis abgebildet. Halten wir also fest:

#### Satz 4.1.8

i) Die cis-Funktion erfüllt:

$$e^{it} = 1 \Leftrightarrow t = k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ii) Die cis-Funktion ist periodisch mit der Periode  $2\pi$ , es gilt nämlich

$$e^{it} = e^{is} \Leftrightarrow t - s = k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

*Beweis.*

i) Zu einem beliebigen  $t \in \mathbb{R}$  kann immer ein  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$  gefunden werden, sodass

$$t = k \cdot 2\pi + \varphi, \quad \text{für ein } k \in \mathbb{Z}.$$

Dann gilt:

$$e^{it} = e^{i(k \cdot 2\pi + \varphi)} = (e^{2\pi i})^k e^{i\varphi} = e^{i\varphi}.$$

Wegen der Eigenschaft i) ist aber  $e^{i\varphi} = 1$  nur für ein einziges  $\varphi \in ]-\pi, \pi]$ , nämlich  $\varphi = 0$ . Damit ist auch ii) gezeigt.

ii) Die Periodizität folgt aus:

$$e^{it} = e^{is} \Leftrightarrow e^{i(t-s)} = 1,$$

und der Anwendung von i). □

Wenn wir die Umkehrung der cis-Funktion einführen wollen, die sogenannte **Argumentfunktion**, müssen wir zuerst den Definitionsbereich von cis so einschränken, dass der Wertebereich von cis (der Einheitskreis) nur einmal durchlaufen wird. Der vorherige Satz liefert uns den eingeschränkten Definitionsbereich für die Umkehrung der Funktion cis. Da cis  $2\pi$  periodisch ist, müssen wir den Definitionsbereich auf einen  $2\pi$  grossen Ausschnitt einschränken. Wir entscheiden uns für das halboffene Intervall  $] -\pi, \pi]$ . Die cis-Funktion  $] -\pi, \pi] \rightarrow S^1$  ist dann bijektiv. Dann hat diese Funktion auch eine eindeutige Umkehrfunktion. Es ist die Funktion, die einer komplexen Zahl  $z \in S^1$  auf dem Einheitskreis ihren Polarwinkel  $\varphi \in ] -\pi, \pi]$  zuordnet. Diese Funktion nennt man die **Argumentfunktion**, und dieser Winkel in  $] -\pi, \pi]$  heisst das **Argument** von  $z$ . Dass man sich bei der Definition der Argumentfunktion für das Intervall  $] -\pi, \pi]$  als Wertebereich entscheidet, ist eine Konvention, man könnte auch  $[0, 2\pi[$  als Intervall nehmen. Die Entscheidung für  $] -\pi, \pi]$  wird sich jedoch für die Definition des komplexen Logarithmus als nützlich erweisen. Hier noch die mathematisch präzise Definition der Argumentfunktion.

#### Definition 4.1.9 (Argumentfunktion)

Die Umkehrfunktion der cis-Funktion eingeschränkt auf  $] -\pi, \pi]$  heisst **Argumentfunktion** und ist also definiert durch:

$$\begin{aligned} \arg : S^1 &\longrightarrow ]-\pi, \pi] \\ e^{it} &\longmapsto \arg(e^{it}) := \text{cis}^{-1}(e^{it}) = t \in ]-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Die Argumentfunktion kann (stetig) auf die **punktierte komplexe Ebene**  $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$  erweitert werden, indem man definiert:

$$\begin{aligned} \arg : \mathbb{C}^* &\longrightarrow ]-\pi, \pi] \\ z &\longmapsto \arg(z) := \text{cis}^{-1}\left(\frac{z}{|z|}\right). \end{aligned}$$

#### Beispiele:

i)  $\arg(i) = \frac{\pi}{2}$

ii)  $\arg(1) = 0$

iii)  $\arg(-2) = \pi$

iv)  $\arg(-i) = -\frac{\pi}{2}$

v)  $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

## 4.1.4 Exponentialform von komplexen Zahlen

### Satz 4.1.10

Eine komplexe Zahl

$$z = x + iy = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$$

lässt sich in der Form

$$z = re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

schreiben wobei  $r = |z|$  der Betrag und  $\varphi = \arg(z)$  das Argument der komplexen Zahl  $z$  sind.

Wir haben neben der kartesischen Schreibweise und der Polarform eine dritte Darstellung für komplexe Zahlen gefunden, die sogenannte **Exponentialform**. Eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  lautet also in den drei Schreibweisen

$$z = \underbrace{x + yi}_{\text{kartesisch}} = \underbrace{r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))}_{\text{Polarform}} = \underbrace{re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}}_{\text{Exponentialform}}$$

### Beispiele:

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Exponentialform um:

i)  $2 + 3i$ :

Es gilt:

$$\begin{aligned} |2 + 3i| &= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \\ \arg(2 + 3i) &= \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = 0.983. \end{aligned}$$

und somit ist die Exponentialform

$$2 + 3i = \sqrt{13}e^{0.983 \cdot i + k \cdot 2\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

ii)  $8 - 6i$ :

Es gilt:

$$\begin{aligned} |8 - 6i| &= \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10, \\ \arg(8 - 6i) &= -\arccos\left(\frac{8}{10}\right) = -\arccos\left(\frac{4}{5}\right) = -0.6435. \end{aligned}$$

und somit ist die Exponentialform

$$8 - 6i = 10e^{-0.6435 \cdot i + k \cdot 2\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## 4.2 Komplexwertige Funktionen

Mit der Exponentialfunktion  $f(z) = \exp(z)$  oder kurz  $f(z) = e^z$  haben wir nun eine erste komplexe oder komplexwertige Funktion kennengelernt, d.h. eine Funktion, welche als Funktionswert eine komplexe Zahl zurückgibt.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z = x + yi &\longmapsto w = u + vi = f(z) \end{aligned}$$

Auch der Definitionsbereich sind die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ . Das heisst, die Exponentialfunktion einer komplexen Zahl ist im Allgemeinen wieder eine komplexe Zahl. Da jede komplexe Zahl aus Real- und Imaginärteil besteht, also aus zwei reellen Zahlen, können sowohl das Argument als auch der Funktionswert einer komplexwertigen als Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  aufgefasst werden. Man sollte also eine Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  genauso graphisch darstellen können wie eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Aber wie macht man das?

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Eine sehr schöne Möglichkeit, die beiden Plots für den Betrag  $|f(z)|$  und das Argument (Phase)  $\arg(f(z))$  in einen Plot reinzupacken, kann man dadurch erreichen, dass man den Betrag als Schattierung plottet und das Argument als Regenbogenfarbe. Diese Möglichkeit ist ziemlich verbreitet und macht schöne Bildchen.

Abbildung 4.2: Phasenplot der komplexen Exponentialfunktion  $\exp(z)$ .  $|\exp(z)|$  ist durch die Helligkeit dargestellt (je heller, je grösser der Betrag).

### 4.3 Potenzen und Wurzeln von komplexen Zahlen

Mit Hilfe der Exponentialform einer komplexen Zahl  $c \in \mathbb{C}$  können wir nun auch die  $n$ -te Wurzel von  $c$  berechnen. Betrachten wir also eine Gleichung der Form

$$z^n = c$$

für ein beliebiges  $c \in \mathbb{C}$  und vorerst einmal  $n \in \mathbb{N}$ . Diese Gleichung ist folgendermassen zu lösen:

1) Schreibe  $c$  in die Exponentialform um:

$$c = re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

wobei  $r = |c|$  und  $\varphi = \arg(c)$ .

2) Die  $n$ -te Wurzel von  $c \in \mathbb{C}$  sind dann die  $n$  verschiedenen komplexen Zahlen

$$z_k = \left( re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i} \right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} i}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

3) Falls gewünscht, wandle die Exponentialform um zurück in die Polarform bzw. dann in die kartesische Form:

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \left( \frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{\varphi}{n} + k \frac{2\pi}{n} \right) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

#### Bemerkungen:

- Man beachte, dass das Wurzelzeichen  $\sqrt[n]{r}$  hier das normale reelle Wurzelzeichen ist, da  $r \geq 0$ . Dieses ist immer eindeutig und enthält keine Mehrdeutigkeiten.
- Es wird hier deutlich, dass die Gleichung  $z^n = c$  insgesamt genau  $n$  komplexe Zahlen als Lösungen hat. Diese  $n$  Lösungen haben alle denselben Betrag  $\sqrt[n]{r}$ , und sie liegen deshalb auf einem Kreis um den Nullpunkt mit Radius  $\sqrt[n]{r}$ . Ihre Polarwinkel unterscheiden sich jeweils um den Winkel  $2\pi/n$ . Das heisst, die  $n$  Lösungen bilden ein reguläres  $n$ -Eck in der komplexen Ebene  $\mathbb{C}$ .
- Man legt fest, dass man unter  $n$ -ten Wurzel der komplexen Zahl  $c$  die erste der  $n$  Lösungen, also

$$z_0 = c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi}{n}}$$

versteht. Dies ist auch der Wert, der z.B. in MATLAB bei der Eingabe von  $c^{1/n}$  berechnet wird. Mit dieser Festlegung wird das Resultat auch konsistent mit dem komplexen Logarithmus (siehe nächster Abschnitt). Ausserdem ist somit auch die Potenzfunktion  $f(z) = z^r$  für beliebige rationale Zahlen  $r \in \mathbb{Q}$  wohldefiniert.

#### Beispiele:

i)  $z^2 = 8 - 6i$ :

Dieses Beispiel haben wir in Abschnitt 1.2.2 schon einmal betrachtet. Mit der Exponentialform bekommen wir eine alternative Methode, um diese Gleichung zu lösen. Wir schreiben die Zahl  $8 - 6i$  zuerst in die Exponentialform um:

$$8 - 6i = re^{i\varphi + k \cdot 2\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

wobei

$$r = |8 - 6i| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$$

und

$$\varphi = \arg(8 - 6i) = -\arccos\left(\frac{8}{10}\right) = -\arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx -0.6435.$$

Die Exponentialform lautet also

$$8 - 6i \approx 10e^{-0.6435 \cdot i + k \cdot 2\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Wurzel davon lässt sich durch die normalen Regeln der Potenzrechnung berechnen:

$$z = \sqrt{10}e^{-\frac{0.6435}{2} \cdot i + k \cdot \pi i} \approx \sqrt{10}e^{-0.3218 \cdot i + k \cdot \pi i}, \quad k = 0, 1.$$

Umgewandelt in die Polarform und die kartesische Form erhalten wir zwei komplexe Zahlen als Lösungen der Gleichung:

$$z = \begin{cases} \sqrt{10}e^{-0.3218 \cdot i} = \sqrt{10}(\cos(-0.3218) + i \sin(-0.3218)) = 2.99995 - 1.00015i, & k = 0, \\ \sqrt{10}e^{-0.3218 \cdot i + \pi i} = \sqrt{10}(\cos(\pi - 0.3218) + i \sin(\pi - 0.3218)) = -2.99995 + 1.00015i, & k = 1. \end{cases}$$

Diese Lösungsmethode ist sicher einfacher, als die in Abschnitt 1.2.2 mit dem reellen Gleichungssystem. Ausserdem funktioniert diese Methode ja auch für die  $n$ -te Wurzel - sie ist also allgemeiner. Ein Nachteil ist aber, dass es durch das Auswerten der arccos-Funktion zu Rundungsfehlern kommen kann, wie gerade eben gesehen.

ii)  $z^3 = -8$ :

Wir wissen bereits, dass  $-2$  eine Lösung dieser Gleichung sein sollte, denn  $(-2)^3 = -8$ . Da wir jedoch insgesamt drei Lösungen erwarten, fehlen uns noch zwei. Auch die reelle Zahl  $-8$  müssen wir dafür in die Exponentialform umschreiben. Dies ergibt

$$-8 = 8e^{i\pi + k \cdot 2\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Wir bekommen also die drei Lösungen

$$z = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

In Polar- bzw. kartesische Form umgewandelt, bekommen wir

$$z = \begin{cases} 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3})) = 1 + \sqrt{3}i & k = 0 \\ 2(\cos(\pi) + i \sin(\pi)) = -2 & k = 1 \\ 2(\cos(\frac{5\pi}{3}) + i \sin(\frac{5\pi}{3})) = 1 - \sqrt{3}i & k = 2 \end{cases}$$

Zeichnet man diese drei Lösungen in der komplexen Ebene ein, erhält man ein gleichseitiges Dreieck mit dem Nullpunkt als Schwerpunkt (siehe Abb. 4.3).

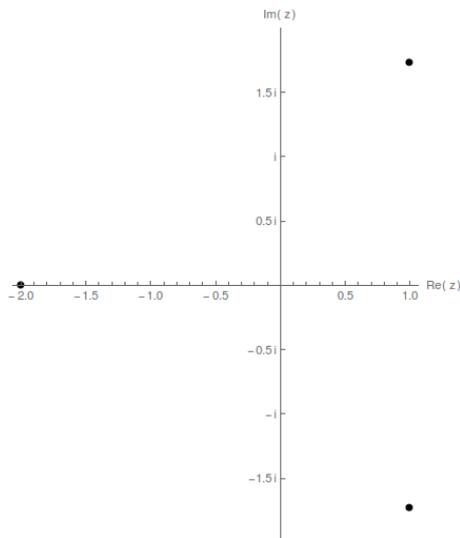


Abbildung 4.3: Die drei Lösungen der Gleichung  $z^3 = -8$ .  $(-8)^{1/3}$  ist die Ecke rechts oben.

Dies ist diese allgemein gültige Tatsache, dass die  $n$ -ten Wurzeln einer komplexen Zahl  $c \in \mathbb{C}$  liegen auf einem regulären (d.h. gleichseitigen)  $n$ -Eck mit dem Nullpunkt als Schwerpunkt. Man beachte, dass

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + \sqrt{3}i$$

und nicht  $-2$ , wie man vielleicht meinen könnte.

iii)  $z^3 = i$ :

Auch bei diesem Beispiel kennen wir bereits eine der drei Lösungen, denn es gilt bekanntlich  $(-i)^3 = -i^2i = (-1)(-i) = i$ . Eine Lösung ist also  $z = -i$ . Welches sind die anderen beiden? Wiederum schreiben wir die komplexe Zahl auf der rechten Seite der Gleichung in Exponentialform

$$i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Dann nehmen wir die 3-te Wurzel davon:

$$z = (e^{i\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi i})^{1/3} = e^{i\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3} i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In Polarform und kartesischer Form erhalten wir daraus:

$$z = \begin{cases} e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2}) = -i & k = -1, \\ e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos(\frac{\pi}{6}) + i \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i & k = 0, \\ e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos(\frac{5\pi}{6}) + i \sin(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i & k = 1. \end{cases}$$

Stellt man die drei Lösungen in der komplexen Ebene graphisch dar, erhalten wir wieder ein gleichseitiges Dreieck in der komplexen Ebene

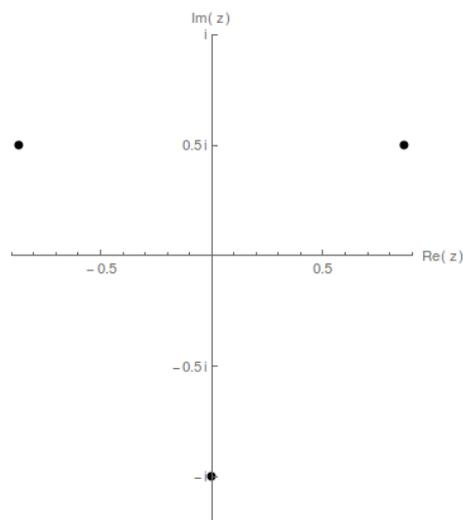


Abbildung 4.4: Die drei Lösungen der Gleichung  $z^3 = i$ .  $i^{1/3}$  entspricht der Ecke rechts oben.

Man beachte:

$$i^{1/3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

## 4.4 Anwendungen von komplexen Zahlen

### 4.4.1 Schwingungen

Als eine erste Anwendung für das Rechnen mit komplexen Zahlen betrachten wir eine einfache mechanische Schwingung. Ein Körper der Masse  $m$  hängt an einer Feder und gleitet dabei über eine ebene Tischfläche. Wir wollen die Bewegung des Körpers beschreiben, wenn er zum Zeitpunkt  $t = 0$  um eine Distanz  $x_0$  ausgelenkt wird und mit einer Anfangsgeschwindigkeit von  $v_0$  angestoßen wird. Gesucht ist Position  $x(t)$  des Körpers zu einem beliebigen Zeitpunkt  $t$ . Aus der Physik wissen wir, dass Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körpers die Ableitungen von  $x(t)$  nach der Zeit sind:

$$\text{Geschwindigkeit:} \quad v(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \dot{x}(t),$$

$$\text{Beschleunigung:} \quad a(t) = \frac{d^2x}{dt^2}(t) = \ddot{x}(t).$$

Weiter besagt das zweite Newtonsche Gesetz, dass die resultierende Kraft auf den Körper proportional zu seiner Beschleunigung ist, genauer:

$$ma(t) = F_{res}(t).$$

Unter der resultierenden Kraft verstehen wir die Summe aller Kräfte, die auf den Körper wirken. In der hier besprochenen Situation sind es deren zwei:

1. Die Federkraft  $F_F$ , die für kleine Auslenkungen durch das Hooksche Gesetz

$$F_F(t) = -kx(t)$$

gegeben ist, wobei  $k$  die sogenannte Federkonstante der Feder ist.

2. Eine Reibungskraft  $F_R$ , die wir hier berücksichtigen wollen. Wir treffen hier die Annahme, dass diese proportional zur Geschwindigkeit des Körpers ist, also

$$F_R(t) = -d\dot{x}(t),$$

wobei  $d$  Dämpfungskonstante genannt wird. Diese wäre z.B. ein näherungsweise Beschreibung für einen Stossdämpfer.

Wir bekommen also eine Gleichung für  $x(t)$ :

$$m\ddot{x}(t) = F_{res}(t) = F_F(t) + F_R(t) = -kx(t) - d\dot{x}(t).$$

Die Masse  $m$ , die Federkonstante  $k$  und die Dämpfungskonstante  $d$  setzen wir als bekannt voraus. Schreibt man alle Terme auf die linke Seite erhält man

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = 0.$$

Dies ist eine **lineare Differentialgleichung 2. Ordnung**. "Linear" bedeutet, dass keine Potenzen oder Funktionen von  $x(t)$  in der Gleichung vorkommen. "2. Ordnung" bedeutet, dass höchste vorkommende Ableitung eine zweifache Ableitung ist. Man kann mathematisch zeigen, dass zusammen mit den gewählten Anfangsbedingungen für die Auslenkung  $x_0$  und der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ , eine solche Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt. Das gesamte Problem inklusive der Anfangsbedingungen ist ein sogenanntes **Anfangswertproblem (AWP)**:

$$\text{Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung} \quad m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + kx(t) = 0, \quad (4.2a)$$

$$\text{Anfangsbedingungen:} \quad \begin{cases} x(0) &= x_0, \\ \dot{x}(0) &= v_0 \end{cases} \quad (4.2b)$$

Wir wollen nun dieses AWP lösen und werden dabei feststellen, dass die komplexen Zahlen bei der Lösung solcher Gleichungen typischerweise auftreten. Wir starten damit, den folgenden Ansatz für die Lösungsfunktion  $x(t)$  anzunehmen:

$$x(t) = e^{\lambda t}.$$

Einen Ansatz in der Form einer Exponentialfunktion wählt man für sämtliche linearen Differentialgleichungen, egal welche Ordnung sie aufweisen. Von diesem Ansatz können wir sofort die ersten beiden Ableitungen berechnen:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \lambda e^{\lambda t}, \\ \ddot{x}(t) &= \lambda^2 e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Dies setzen wir nun in die Differentialgleichung ein und bekommen:

$$m\lambda^2 x(t) + d\lambda x(t) + kx(t) = 0.$$

In der letzten Gleichung können wir jedoch durch die gesuchte Funktion  $x(t)$  dividieren. Es ergibt sich eine quadratische Gleichung für  $\lambda$ :

$$m\lambda^2 + d\lambda + k = 0.$$

Die linke Seite der Gleichung nennt man das **charakteristische Polynom** des AWP. Mit der Auflösungsformel für quadratische Gleichungen findet man

$$\lambda_{1,2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4mk}}{2m} = -\frac{d}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2},$$

wobei wir die Grössen

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{und} \quad \delta := \frac{d^2}{2m}$$

eingeführt haben. Die Grössen  $\omega_0$  (ungedämpfte Kreisfrequenz) und  $\delta$  (Abklingkonstante) sind positive reelle Zahlen. Es gibt keinen Grund, warum der Ausdruck unter der Wurzel nicht auch negativ werden könnte. Wenn wir z.B. die Dämpfung vernachlässigen, setzen wir  $\delta = 0$ . In diesem Fall bleibt unter der Wurzel bloss  $-\omega_0^2$  stehen und die Werte für  $\lambda_{1,2}$  werden offensichtlich imaginär. Analysieren wir also zuerst den Fall schwacher Dämpfung  $\delta < \omega_0$ , in dem die Nullstellen  $\lambda_{1,2}$  imaginär sind:

**Gedämpfte Schwingung**  $0 < \delta < \omega_0$ :

In diesem Fall sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms imaginär:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega,$$

wobei wir den Imaginärteil als Kreisfrequenz

$$\omega := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \quad [\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

und den Realteil als Zeitkonstante

$$\tau := \frac{1}{\delta}, \quad [\tau] = \text{s}$$

umgeschrieben haben.  $\omega$  ist die Kreisfrequenz der **gedämpften Schwingung** und  $\tau$  die Zeitkonstante der exponentiellen Dämpfung, wie wir sogleich sehen werden. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (4.2a) ist die Linearkombination

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-\frac{t}{\tau}} e^{i\omega t} + c_2 e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-i\omega t} = e^{-\frac{t}{\tau}} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t})$$

aus den Exponentialfunktionen mit beiden Nullstellen.  $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$  sind komplexe Zahlen die aus den Anfangsbedingungen (4.2b) berechnet werden können, was wir jetzt durchführen werden. Die 1. Ableitung von  $x(t)$  nach der Zeit ist gegeben durch:

$$\dot{x}(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (i\omega c_1 e^{i\omega t} - i\omega c_2 e^{-i\omega t}) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}),$$

damit sind die Position und die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= i\omega c_1 - i\omega c_2 - \frac{1}{\tau} (c_1 + c_2) = v_0 = 0, \end{aligned}$$

wobei wir hier der Einfachheit halber nur den Fall betrachten, bei dem der Körper nicht angestossen wird  $v_0 = 0$ . Dies ist ein lineares Gleichungssystem für  $c_1$  und  $c_2$ , welches man wie gewohnt mit dem Gauß-Algorithmus lösen kann. Man muss nur beachten, dass es ein komplexes Gleichungssystem ist. Man erhält als Lösungen:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{x_0}{2} \left( 1 + \frac{1}{i\omega\tau} \right), \\ c_2 &= \frac{x_0}{2} \left( 1 - \frac{1}{i\omega\tau} \right). \end{aligned}$$

Setzt man diese Zahlen in die allgemeine Lösung ein, erhält man schliesslich die **gedämpfte Schwingung**:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{t}{\tau}} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{1}{2i\omega\tau} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \right] = \\ &= x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\omega t) \right]. \end{aligned}$$

Die hier erhaltene Lösung  $x(t)$  für die gedämpfte Schwingung des Körpers ist in der Abbildung 4.5 dargestellt. Die Schwingung wird durch den exponentiellen Vorfaktor gedämpft. Der Ausdruck in der Klammer beschreibt die Schwingung. Die Kreisfrequenz dieser Schwingung ist  $\omega$ .

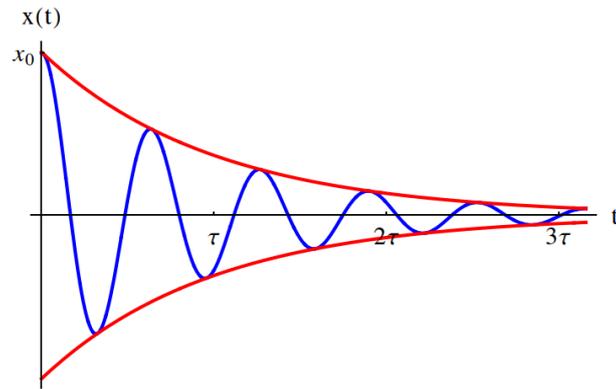


Abbildung 4.5: Beispiel einer gedämpften Schwingung (blau). Die Einhüllenden (Exponentialfunktionen) sind in rot dargestellt. Sie sind gegeben durch die Funktionen  $\pm \frac{x_0}{\omega} e^{-t/\tau}$ .

Betrachten wir als Spezialfall der gedämpften Schwingung den ungedämpften Fall, also setzen wir die Dämpfung  $\delta = 0$ .

**Ungedämpfter Fall  $\delta = 0$ :**

Die beiden Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind in diesem Fall

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

und der Realteil verschwindet, was  $\tau \rightarrow \infty$  für die Zeitkonstante bedeutet. Die allgemeine Lösung ist wiederum die Linearkombination

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}.$$

Die komplexen Zahlen  $c_1$  und  $c_2$  findet man wieder mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= i\omega_0 c_1 - i\omega_0 c_2 = v_0. \end{aligned}$$

Diesmal bekommen wir als Lösungen für  $c_1$  und  $c_2$  die komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{v_0}{i\omega_0} \right), \\ c_2 &= \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{v_0}{i\omega_0} \right). \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung des AWP (4.2) gefunden:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t} = \frac{x_0}{2} (e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}) + \frac{v_0}{2i\omega_0} (e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}) = \\ &= x_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Die Lösung ist eine (ungedämpfte) harmonische Schwingung (siehe Abb. 4.6).

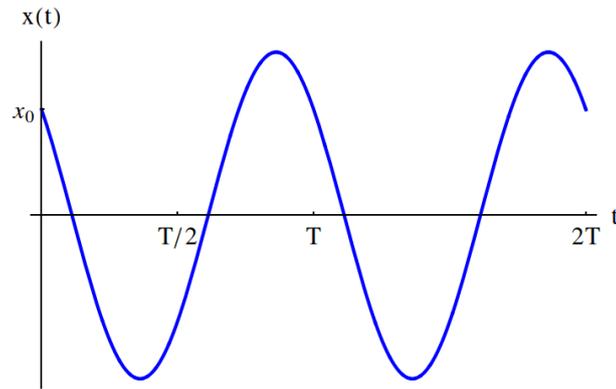


Abbildung 4.6: Ungedämpfte Schwingung. Es handelt sich um eine Sinusfunktion mit Kreisfrequenz  $\omega_0$ . In diesem Beispiel wird der Körper mit  $v_0 < 0$  angeschoben. Deshalb ist die Amplitude der Schwingung grösser als  $x_0$  und die Funktion ist phasenverschoben.

Man beachte, dass die Frequenz der ungedämpften Schwingung  $\omega_0 > \omega$  leicht grösser ist, als diejenige der geämpften Schwinung. Betrachten wir zur Illustration noch den Spezialfall  $v_0 = 0$ , bei dem der Körper nur um  $x_0$  ausgelenkt, aber nicht angestossen wird. In diesem Fall ist die Lösung einfach

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t).$$

$\omega_0$  ist also die Kreisfrequenz der Schwingung und  $x_0$  deren Amplitude. Den gleichen Ausdruck für  $x(t)$  hätten wir auch bekommen, indem wir im  $x(t)$  der gedämpften Schwingung den Grenzwert  $\tau \rightarrow \infty$  genommen hätten.

#### Überkritische Dämpfung (Kriechfall): $\delta > \omega_0$ :

Was aber passiert, wenn die Dämpfung so gross ist, dass der Körper gar nicht mehr schwingen kann? Dann landen wir im Fall der **überkritischen Dämpfung**. In diesem Fall bleiben die Nullstellen des charakteristischen Polynoms reell:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\frac{1}{\tau} \pm \kappa,$$

wobei wir eine weitere Grösse

$$\kappa := \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

definiert haben.  $\kappa$  ist die sogenannte **Kriechkonstante**. Die allgemeine Lösung ist dann gegeben durch:

$$x(t) = c_1 e^{(-\frac{1}{\tau} + \kappa)t} + c_2 e^{(-\frac{1}{\tau} - \kappa)t} = e^{-\frac{t}{\tau}} (c_1 e^{\kappa t} + c_2 e^{-\kappa t})$$

Um die Zahlen  $c_1$  und  $c_2$  aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen, lösen wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= -\frac{1}{\tau} (c_1 + c_2) + \kappa (c_1 - c_2) = 0, \end{aligned}$$

wobei wir wiederum der Einfachheit halber  $v_0 = 0$  annehmen. Wir bekommen die Lösungen

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{x_0}{2} \left( 1 + \frac{1}{\kappa \tau} \right), \\ c_2 &= \frac{x_0}{2} \left( 1 - \frac{1}{\kappa \tau} \right), \end{aligned}$$

die diesmal ebenfalls reell werden. Eingesetzt in die allgemeine Lösung ergibt sich damit

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{t}{\tau}} (c_1 e^{\kappa t} + c_2 e^{-\kappa t}) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ \frac{1}{2} (e^{\kappa t} + e^{-\kappa t}) + \frac{1}{2\kappa \tau} (e^{\kappa t} - e^{-\kappa t}) \right] = \\ &= x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ \cosh(\kappa t) + \frac{1}{\kappa \tau} \sinh(\kappa t) \right]. \end{aligned}$$

Der Körper führt hier gar keine Schwingung mehr aus, sondern “kriecht” langsam in seine Gleichgewichtslage bei  $x = 0$ . Deshalb bezeichnet man diesen überkritisch gedämpften Fall auch als **Kriechfall**. Ein Beispiel eines Kriechfalls ist in Abb. 4.7 dargestellt.

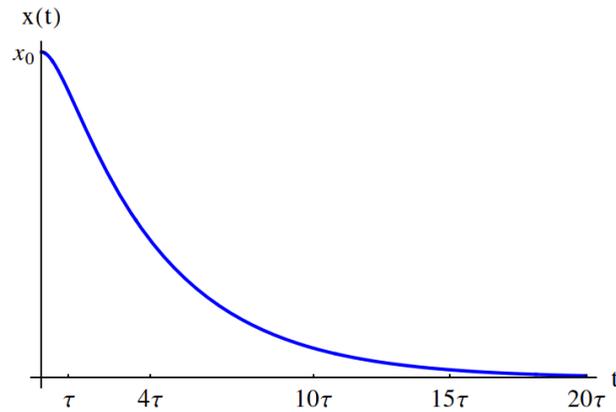


Abbildung 4.7: Überkritische Dämpfung (Kriechfall).

**Aperiodischer Grenzfall**  $\omega_0 = \delta$ :

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir noch den Grenzfall zwischen gedämpfter Schwingung und Kriechfall. In diesem Spezialfall ist

$$\omega_0 = \delta \quad \text{oder} \quad d = \sqrt{2mk}. \quad (4.3)$$

Das charakteristische Polynom hat nun nur noch eine doppelte Nullstelle

$$\lambda = -\delta = -\frac{1}{\tau}.$$

In diesem Fall enthält die allgemeine Lösung neben der Exponentialfunktion ein lineares Polynom als zusätzlichen Faktor.<sup>4</sup> Die allgemeine Lösung ist dann

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (c_1 t + c_2), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Die Anfangsbedingungen ergeben das Gleichungssystem für  $c_1$  und  $c_2$ :

$$\begin{aligned} x(0) &= c_2 = x_0, \\ \dot{x}(0) &= -\frac{1}{\tau} c_2 + c_1 = v_0 \end{aligned}$$

mit den reellen Lösungen

$$\begin{aligned} c_1 &= \left( v_0 + \frac{x_0}{\tau} \right), \\ c_2 &= x_0. \end{aligned}$$

Eingesetzt erhält man dann die Lösung für diesen aperiodischen Grenzfall

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (c_1 t + c_2) = x_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ \left( \frac{v_0}{x_0} + \frac{1}{\tau} \right) t + 1 \right].$$

Der aperiodische Grenzfall zeichnet sich dadurch aus, dass der Körper unter Umständen einmal über seine Gleichgewichtslage hinausschießt und erst dann in das Gleichgewicht zurückfällt. Beispiel einer solcher Bewegung ist in der Abbildung 4.8 dargestellt.

<sup>4</sup>Es würde zu weit führen, dies hier im Detail zu begründen.

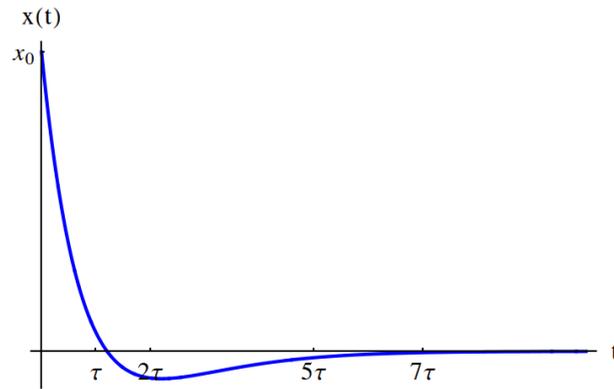


Abbildung 4.8: Aperiodischer Grenzfall. In dem hier gezeigten Fall wird der Körper zusätzlich mit einem negativen  $v_0$  angeschoben.

#### 4.4.2 Elektrischer Schwingkreis (LCR-Kreis)

Die komplexen Zahlen sind auch ein sehr nützliches Hilfsmittel, um Stromkreise mit Wechselstrom zu beschreiben. Wechselstrom ist ein Stromfluss, dessen Richtung sich mit einer bestimmten Frequenz periodisch ändert. Es handelt sich also wieder um eine Schwingung, nur ist es diesmal die elektrische Stromstärke oder die elektrische Spannung, die oszilliert und nicht die Auslenkung eines Körpers.

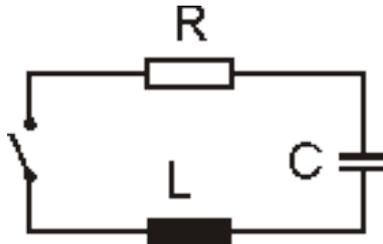


Abbildung 4.9: Elektrischer Schwingkreis (LCR-Kreis). Der Kondensator ist charakterisiert durch seine Kapazität  $C$  (Einheit: Farad  $[C] = F$ ), die Spule durch ihre Induktivität  $L$  (Einheit Henry  $[L] = H$ ).

Als Beispiel betrachten wir einen elektrischen Stromkreis, welcher einen elektrischen Kondensator, eine Spule und einen elektrischen Widerstand enthält (siehe Abb. 4.9). Dies ist ein sogenannter elektrischer Schwingkreis. In geschlossenen elektrischen Stromkreisen gelten sogenannten Kirchhoffschen Regeln. Die Kirchhoffsche Knotenregel besagt, dass bei einem Knoten die Summe der einflussenden Stromstärken gleich der Summe der ausflussenden Stromstärken sein muss. Diese Regel ist eine Konsequenz der elektrischen Ladungserhaltung, ist aber für diesen Schwingkreis nicht von Bedeutung, da er gar keinen Knoten enthält. Die Kirchhoffsche Maschenregel besagt, dass die Summe der Spannungen in einer Masche eines Stromkreises sich immer zu null addieren muss. Für den elektrischen Schwingkreis bekommen wir also aus dieser Maschenregel die Gleichung

$$U_C + U_R + U_L = 0,$$

wobei  $U_C$ ,  $U_R$  und  $U_L$  die Spannungen über dem Kondensator, dem Widerstand und der Spule sind. Aus der Elektrotechnik ist bekannt, dass die Ladung auf einem Kondensator  $Q(t)$  proportional zur Spannung ist, die über dem Kondensator abfällt, das heisst

$$Q(t) = CU_C(t).$$

Die Proportionalitätskonstante ist die **Kapazität** des Kondensators und hängt von der Kondensatorgeometrie ab. Für einen konventionellen elektrischen Widerstand gilt das Ohmsche Gesetz

$$U_R(t) = RI(t).$$

Für die Spannung, die über einer Spule erzeugt wird, gilt gemäss dem Induktionsgesetz

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = L\dot{I}(t),$$

wobei die Induktivität  $L$  einer Spule von der Dichte und der Anzahl der Wicklungen der Spule abhängt. Setzen wir diese Beziehungen in die Maschenregel ein, so erhalten wir.

$$U_C + U_R + U_L = \frac{Q(t)}{C} + RI(t) + L\dot{I}(t) = 0.$$

Die elektrische Stromstärke entspricht der zeitlichen Änderung der Ladung auf dem Kondensator, also

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}(t) = \dot{Q}(t).$$

Setzt man dies für  $I(t)$  in die Maschenregel ein, erhält man eine zur im letzten Abschnitt behandelten Schwingung analogen Gleichung

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q} + \frac{Q(t)}{C} = 0. \quad (4.4)$$

Wir gehen von der Situation aus, dass der Kondensator zum Zeitpunkt  $t = 0$  mit einer bestimmten Ladung  $Q_0$  aufgeladen ist und dass wir genau zu diesem Zeitpunkt  $t = 0$  den Schalter schliessen. Die zur linearen Differentialgleichung (2. Ordnung) gehörenden Anfangsbedingungen sind also

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q_0, \\ \dot{Q}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Differentialgleichung ergibt sich das Anfangswertproblem (AWP):

$$\text{Lineare Differentialgleichung 2. Ordnung:} \quad L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = 0, \quad (4.5a)$$

$$\text{Anfangsbedingungen:} \quad \begin{cases} Q(0) = Q_0, \\ \dot{Q}(0) = 0. \end{cases} \quad (4.5b)$$

Mathematisch gesehen ist dieses AWP genau das gleiche wie das AWP in (4.2) und hat deshalb auch die gleichen Lösungen. Wir müssen nur folgende Ersetzungen machen:

$$\begin{aligned} x(t) &\longleftrightarrow Q(t) \\ x(0) = x_0 &\longleftrightarrow Q(0) = Q_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 &\longleftrightarrow \dot{Q}(0) = I_0 \\ L &\longleftrightarrow m, \\ R &\longleftrightarrow d, \\ k &\longleftrightarrow \frac{1}{C}. \end{aligned}$$

Wir betrachten den allgemeinen Fall mit elektrischem Widerstand  $R \geq 0$ . Je nach Stärke des elektrischen Widerstandes führt das System eine Schwingung aus oder es liegt der Kriechfall vor. Der Grenzfall zwischen Schwingung und Kriechfall ist der aperiodische Grenzfall. Entscheidend dafür, welcher Fall eintritt, sind die Abklingkonstante

$$\delta = \frac{R}{2L}$$

und die Kreisfrequenz des ungedämpften Schwingkreises

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

Je nach dem, ob die Abklingkonstante kleiner, gleich oder grösser ist als die Frequenz erhält man eine gedämpfte Schwingung, den aperiodischen Grenzfall oder den Kriechfall. Die Situation ist vollkommen analog zur mechanischen Schwingung eines Körpers an der Feder. Wir betrachten zuerst den Fall, in welchem das System eine (gedämpfte oder ungedämpfte) Schwingung ausführt. In diesem Fall wird der Kondensator zuerst über den fließenden elektrischen Strom entladen, was eine Spannung in der Spule induziert. Dadurch fließt die im elektrischen Feld gespeicherte Energie im Kondensator über auf die Spule, die dann nach einem Viertel der Periode  $t = T/4$  die ganze Energie im Magnetfeld in ihrem Innern enthält. Der elektrische Strom fließt aber weiter, wobei der Kondensator entgegengesetzt zum Anfang wieder aufgeladen wird. Nach  $t = T/2$  ist er vollständig geladen und es fließt kein Strom mehr. Dann beginnt es wieder von vorn, aber mit entgegengesetztem Vorzeichen bis wir nach  $t = T$  wieder beim Anfangszustand sind.

**Gedämpfte Schwingung**  $0 < \delta < \omega_0$  bzw.  $0 < R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ :

In Analogie zur Lösung für den schwingenden Körper ist die Ladung auf dem Kondensator  $Q(t)$  gegeben durch

$$Q(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} (c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\omega t) \right].$$

Die Zeitkonstante für den exponentiellen Zerfall der Amplitude ist dabei gegeben durch

$$\tau = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R},$$

und die Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung ist

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{CL} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}.$$

Wir betonen hier nochmals, dass die Frequenz der gedämpften Schwingung leicht geringer ist als der ungedämpften Schwingung

$$\omega < \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

Wenn wir zu jedem Zeitpunkt die Ladung auf dem Kondensator kennen, dann können wir auch die Spannung über diesem ausrechnen, denn

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \left[ \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega\tau} \sin(\omega t) \right].$$

Den Strom findet man aus der Ableitung von  $Q(t)$ :

$$\begin{aligned} I(t) = \dot{Q}(t) &= Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left( -\frac{1}{\tau} \cos(\omega t) - \frac{1}{\omega\tau^2} \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega t) + \frac{\omega}{\omega\tau} \cos(\omega t) \right) = \\ &= -\frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \omega\tau + \frac{1}{\omega\tau} \right) \sin(\omega t) = -\frac{Q_0}{\omega CL} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t) = -Q_0 \frac{\omega_0^2}{\omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Um die Spannung über der Spule zu erhalten müssen wir noch einmal nach der Zeit ableiten:

$$U_L = L\dot{I}(t) = -\frac{LQ_0\omega_0^2}{\omega} e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \omega \cos(\omega t) - \frac{1}{\tau} \sin(\omega t) \right) = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \frac{1}{\omega\tau} \sin(\omega t) - \cos(\omega t) \right).$$

In der Abbildung 4.10 ist die gedämpfte Schwingung eines elektrischen Schwingkreises dargestellt. Sowohl die Stromstärke  $I(t)$  im Stromkreis, wie auch die beiden Spannungen  $U_C(t)$  über dem Kondensator und  $U_L(t)$  über der Spule werden durch den Energieverlust im Widerstand exponentiell gedämpft.

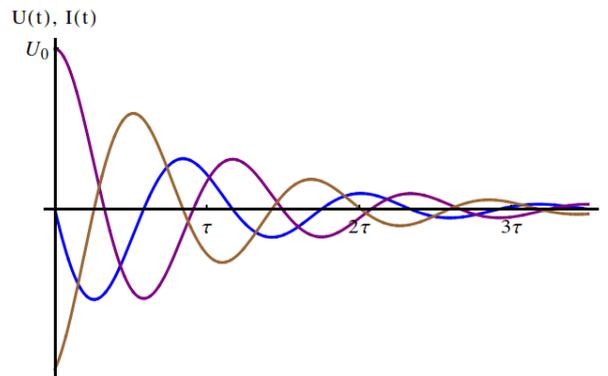


Abbildung 4.10: Gedämpfte Schwingung eines elektrischen Schwingkreises (LCR-Kreises). Blau dargestellt ist die Stromstärke  $I(t)$ , violett die Spannung über dem Kondensator  $U_C(t)$  und in braun die induzierte Spannung der Spule  $U_L(t)$ .  $U_0$  ist die Spannung auf die der Kondensator anfänglich geladen wurde. Die Stromstärke ist zuerst negativ, da der Kondensator anfangs entladen wird. Die Stromstärke  $I$  hinkt der Spannung über dem Kondensator  $U_C$  hinterher und eilt der Spannung über der Spule  $U_L$  voraus.

Die drei Grössen weisen eine Phasenverschiebung zueinander auf. Die Stromstärke “hinkt” gewissermassen der Spannung über dem Kondensator hinterher, eilt jedoch der Spannung über der Spule voraus. Natürlich kann diese Phasenverschiebung berechnet werden.

**Ungedämpfter Fall  $\delta = R = 0$ :**

Wenn der elektrische Widerstand vernachlässigt werden kann, erhält man eine ungedämpfte Schwingung mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{CL}}.$$

Die Ladung auf dem Kondensator und die Stromstärke im Stromkreis im ungedämpften Fall findet man durch den Grenzübergang  $\tau \rightarrow \infty$  aus dem gedämpften Fall:

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t),$$

$$I(t) = \dot{Q}(t) = -Q_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t).$$

Die Spannungen über dem Kondensator bzw. über der Spule sind dann gegeben durch

$$U_C(t) = \frac{Q_0}{C} \cos(\omega_0 t),$$

$$U_L(t) = L\dot{I}(t) = -Q_0 L \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -\frac{Q_0}{C} \cos(\omega_0 t).$$

Die ungedämpfte Schwingung des LCR-Kreises ist in der Abbildung 4.11 dargestellt.

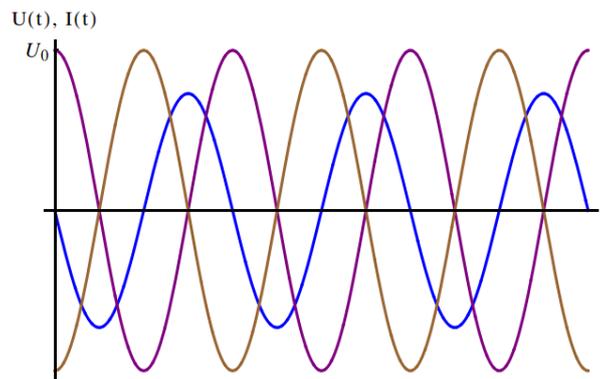


Abbildung 4.11: Schwingung eines elektrischen Schwingkreises mit vernachlässigbarem Widerstand (LC-Kreis). Blau dargestellt ist die Stromstärke  $I(t)$ , violett die Spannung über dem Kondensator  $U_C(t)$  und in braun die induzierte Spannung der Spule  $U_L(t)$ .  $U_0$  ist die Spannung auf die der Kondensator anfänglich geladen wurde. Die drei Grössen sind jeweils exakt um  $\pi/2$  phasenverschoben.

Man sieht, dass im ungedämpften Schwingkreis (idealer Schwingkreis) die Stromstärke gegenüber der Spannung über dem Kondensator exakt um  $\pi/2$  hinterherhinkt, der Spannung über der Spule jedoch um genau  $\pi/2$  vorseilt.

**Überkritische Dämpfung (Kriechfall):  $\delta > \omega_0$  bzw.  $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ :**

Wenn der elektrische Widerstand im elektrischen Schwingkreis eine kritische Grösse übertrifft, dann erhalten wir den Kriechfall. Der Schwingkreis kann gar keine Schwingung mehr durchlaufen, sondern der Kondensator entlädt sich ein Mal, wobei die ganze Energie im Widerstand verloren geht. Die Ladung auf dem Kondensator ist

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \cosh(\kappa t) + \frac{1}{\kappa \tau} \sinh(\kappa t) \right)$$

mit der Kriechkonstante

$$\kappa = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}.$$

Die Stromstärke und die Spannungen über dem Kondensator und in der Spule sind dann gegeben durch:

$$I(t) = \dot{Q}(t) = Q_0 \kappa \left( 1 - \frac{1}{\kappa^2 \tau^2} \right) e^{-\frac{t}{\tau}} \sinh(\kappa t) = -\frac{Q_0 \omega_0^2}{\kappa} e^{-\frac{t}{\tau}} \sinh(\kappa t)$$

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \cosh(\kappa t) + \frac{1}{\kappa \tau} \sinh(\kappa t) \right),$$

$$U_L(t) = L \dot{I}(t) = \frac{Q_0}{C} e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \frac{1}{\kappa \tau} \sinh(\kappa t) - \cosh(\kappa t) \right).$$

Ein Beispiel eines Kriechfalls ist in Abb. 4.12 dargestellt. Alle drei Größen führen keine Schwingung aus, sondern "kriechen" gegen null. Die Energie wird dabei im elektrischen Widerstand in Wärme umgewandelt (dissipiert).

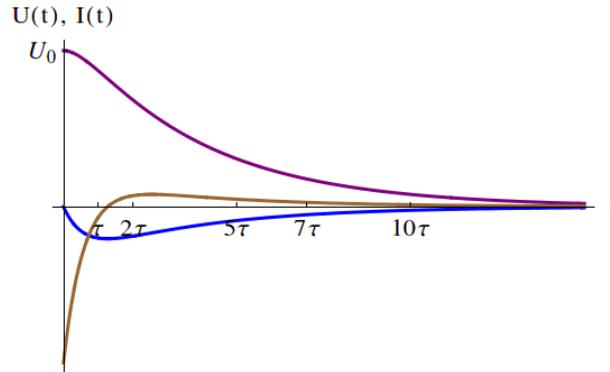


Abbildung 4.12: Kriechfall eines elektrischen Schwingkreises. Blau dargestellt ist die Stromstärke  $I(t)$ , violett die Spannung über dem Kondensator  $U_C(t)$  und in braun die induzierte Spannung der Spule  $U_L(t)$ .

**Aperiodischer Grenzfall**  $\omega_0 = \delta$  bzw.  $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ :

Natürlich existiert auch für den elektrischen Schwingkreis der Grenzfall zwischen dem Fall der gedämpften Schwinung und dem Kriechfall. Die Ladung auf dem Kondensator ist in diesem Fall gegeben durch

$$Q(t) = Q_0 \left( \frac{t}{\tau} + 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Für die Stromstärke und die Spannungen über dem Kondensator und der Spule erhält man dann:

$$I(t) = -\frac{Q_0}{\tau^2} t e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{Q_0}{CL} t e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$U_C(t) = \frac{Q_0}{C} \left( \frac{t}{\tau} + 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$U_L(t) = \frac{Q_0}{C} \left( \frac{t}{\tau} - 1 \right) e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

In der Abbildung 4.13 sind diese Größen graphisch dargestellt.

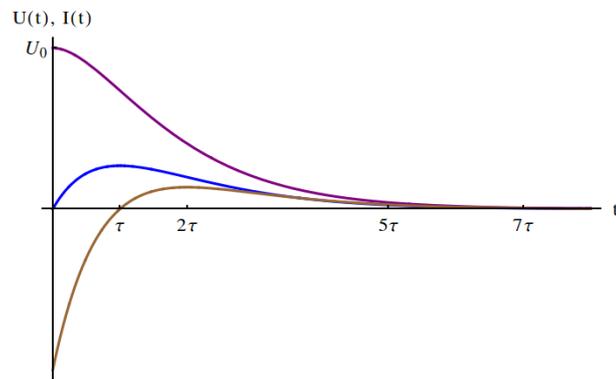


Abbildung 4.13: Aperiodischer Grenzfall eines elektrischen Schwingkreises. Blau dargestellt ist die Stromstärke  $I(t)$ , violett die Spannung über dem Kondensator  $U_C(t)$  und in braun die induzierte Spannung der Spule  $U_L(t)$ .

**Teil II**

**Lineare Algebra II**

# Kapitel 5

## Vektorräume

Nun komm schon Gehirn: Du magst *mich* nicht und ich mag *Dich* nicht. Aber da müssen wir jetzt leider durch.

---

Homer J. Simpson

In diesem Kapitel führen wir den in der Linearen Algebra zentralen Begriff des *Vektorraums* ein. Gewissermassen der Prototyp eines Vektorraums ist der  $\mathbb{R}^n$ . Ein Vektorraum ist nämlich eine Verallgemeinerung davon. In einfachen Worten ausgedrückt, ist ein Vektorraum eine abstrakte Menge bestehend aus Elementen, mit denen “man rechnen kann wie mit Vektoren des  $\mathbb{R}^n$ ”. Unter “rechnen wie mit Vektoren des  $\mathbb{R}^n$ ” versteht man, dass man in dieser Menge die Elemente addieren kann und dass man diese Elemente mit einer Zahl multiplizieren kann. Und es sollen dabei die gleichen Regeln gelten wie auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Hat man für eine solche Menge gezeigt, dass sie ein Vektorraum ist, erleichtert dies das Rechnen in dieser Menge enorm. Denn obwohl diese Menge beliebig abstrakt und kompliziert sein kann, übertragen sich viele nützliche Eigenschaften des  $\mathbb{R}^n$  in natürlicher Weise auf diese Menge.

### 5.1 Vektorräume

Bevor wir die Definition eines Vektorraums in kurzer und kompakter Form aufschreiben, versuchen wir den Begriff in Worten zu erklären. Ein Vektorraum ist in erster Linie eine Menge  $V$ , deren Elemente wir als **Vektoren** bezeichnen.  $V$  darf eigentlich so ziemlich irgendwas sein ausser die leere Menge. Es muss aber auf  $V$  eine **Addition**  $+$  geben, also eine Rechenoperation, mit welcher wir zwei Vektoren  $v, w \in V$  (nach gewissen Regeln) zu einem Vektor  $v+w \in V$  addieren können. Zusätzlich gibt es auf  $V$  mit der **Skalarmultiplikation**, noch eine weitere Rechenoperation, mit der wir einen Vektor  $v \in V$  (ebenfalls nach gewissen Regeln) mit einer Zahl  $\lambda$  multiplizieren<sup>1</sup>. Diese Zahlen nennen wir **Skalare**, und die Skalare müssen Elemente eines **Körpers**  $\mathbb{K}$  sein. Das heisst, die Zahlen müssen gewissen Rechenregeln – den sogenannten Körperaxiomen – gehorchen. In den Abschnitten 1.1.3 und 1.2.4 haben wir gesehen, dass die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  und die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$  diese Axiome erfüllen und somit Körper sind. Und diese beiden Körper sind auch diejenigen, welche am häufigsten für Vektorräume verwendet werden. Man spricht von reellen Vektorräumen (kurz:  $\mathbb{R}$ -Vektorräume), wenn  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und von komplexen Vektorräumen (kurz:  $\mathbb{C}$ -Vektorräume), wenn  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

Demnach besteht also ein Vektorraum, präzise gesagt, aus vier Zutaten: einer (nicht leeren) Menge  $V$ , einem Körper  $\mathbb{K}$ , einer Addition  $+$  und einer Skalarmultiplikation  $\cdot$ . Meistens aber bezeichnet man einfach die Menge  $V$  selbst als Vektorraum, wenn die anderen drei Zutaten klar sind. Es folgt nun die kompakte Definition eines Vektorraums:

#### Definition 5.1.1 (Vektorraum)

Ein **Vektorraum über dem Körper**  $\mathbb{K}$  (kurz:  $\mathbb{K}$ -Vektorraum) ist eine nicht leere Menge  $V$  mit einer Addition  $+$ , die zwei Elementen  $u, v \in V$  ein Element

$$u + v \in V$$

zuordnet und einer Skalarmultiplikation  $\cdot$ , die einem Element  $v \in V$  und einem Element  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein Element

$$\lambda \cdot v \in V$$

---

<sup>1</sup>Verwechseln Sie die Skalarmultiplikation nicht mit dem Skalarprodukt. Das sind zwei verschiedene Dinge.

zuordnet.

- Die Addition  $+$  erfüllt folgende Eigenschaften:

i) Assoziativität:

$$(u + v) + w = u + (v + w) \quad \forall u, v, w \in V$$

ii) Existenz des Nullvektors (Neutralelement von  $+$ ):

$$\exists \mathbf{n} \in V : v + \mathbf{n} = v \quad \forall v \in V$$

Der Vektor  $\mathbf{n}$  ist der Nullvektor und wir bezeichnen ihn mit  $0$ .

iii) Existenz des Negativen (Inverse von  $+$ ):

$$\forall v \in V \exists w \in V : v + w = 0$$

Der Vektor  $w$  ist der zu  $v$  negative Vektor und wir bezeichnen ihn mit  $w = -v$ .

iv) Kommutativität:

$$v + w = w + v \quad \forall v, w \in V$$

- Die Skalarmultiplikation  $\cdot$  erfüllt folgende Eigenschaften:

v) Assoziativität:

$$(\lambda\mu) \cdot v = \lambda(\mu \cdot v) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, v \in V$$

vi) Neutralität der Eins:

$$\text{für } 1 \in \mathbb{K} : 1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$$

- Schliesslich sind noch folgende zwei Distributivgesetze erfüllt:

vii)

$$\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, v, w \in V$$

viii)

$$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v \quad \forall v \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Die Eigenschaften i)-viii) heissen **Vektorraum-Axiome**. Die Elemente des Vektorraums  $V$  heissen **Vektoren**. Die Elemente des Körpers  $\mathbb{K}$  heissen **Skalare**.

### Beispiele:

1) Das bekannteste Beispiel eines Vektorraums ist natürlich der  $\mathbb{R}^n$  selber:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_k \in \mathbb{R}, 1 \leq k \leq n, \right\}$$

mit der Addition

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$

und der Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$

erfüllt alle Vektorraum-Axiome, was wir im Abschnitt 2.1.2 bereits gesehen haben. Damit ist der  $\mathbb{R}^n$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

2) Lässt man in den Vektoren auch imaginäre Zahlen zu, dann bekommt man

$$\mathbb{C}^n = \left\{ z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mid z_k \in \mathbb{C}, 1 \leq k \leq n, \right\}.$$

Die Addition funktioniert gleich wie im  $\mathbb{R}^n$ :

$$w + z = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 + z_1 \\ \vdots \\ w_n + z_n \end{pmatrix}, \quad w, z \in \mathbb{C}^n.$$

Durch die Skalarmultiplikation

$$\lambda \cdot z = \lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \vdots \\ \lambda z_n \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{C}^n, \lambda \in \mathbb{C}$$

haben wir hier  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  gewählt und alle Vektorraumaxiome sind erfüllt. Damit ist  $\mathbb{C}^n$  ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

3) Dass es sich auch bei der Menge von  $m \times n$ -Matrizen um einen Vektorraum handelt, haben wir ebenfalls bereits in einem früheren Abschnitt 3.1.2 gezeigt, als wir die Addition und die Skalarmultiplikation für Matrizen eingeführt und die zugehörigen Rechenregeln angeschaut haben. Es handelt sich also bei den reellen Matrizen  $\mathbb{R}^{m \times n}$  um einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und bei den komplexen Matrizen  $\mathbb{C}^{m \times n}$  um einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

4) Betrachte die Menge der Polynome vom Grad  $\leq 2$ , also die Menge

$$P_2 := \left\{ p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Addition: Für zwei Polynome

$$p_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in P_2 \quad p_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 \in P_2$$

ist die Summe

$$p_1(x) + p_2(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 \in P_2$$

natürlich wieder ein Polynom in  $P_2$ .

- Skalarmultiplikation: Ebenso ist für eine beliebige Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  das Polynom

$$\lambda \cdot p_1(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 \in P_2.$$

Die Addition und die Skalarmultiplikation sind also auf  $P_2$  erklärt. Um zu zeigen, dass  $P_2$  ein Vektorraum ist, müssten wir nun alle 8 Vektorraum-Axiome überprüfen. Wir begnügen uns mit der Existenz des Nullvektors (Axiom ii)) und dem Distributivgesetz (Axiom vii)). Der Nullvektor in  $P_2$  ist das Polynom

$$p_0(x) = 0.$$

Dieses Polynom erfüllt das Axiom ii), denn

$$p_0(x) + p(x) = 0 + a_0 + a_1x + a_2x^2 = p(x), \quad \forall p(x) \in P_2.$$

Das Distributivgesetz ist

$$\begin{aligned} \lambda(p_1(x) + p_2(x)) &= \lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2 + b_0 + b_1x + b_2x^2) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \lambda b_0 + \lambda b_1x + \lambda b_2x^2 \\ &= \lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2) + \lambda(b_0 + b_1x + b_2x^2) = \lambda p_1(x) + \lambda p_2(x). \end{aligned}$$

Obwohl  $P_2$  eine Menge von Funktionen (eben Polynomen) ist, kann man die Elemente von  $P_2$  dennoch als "Vektoren" bezeichnen. Die Überprüfung der anderen Vektorraum-Axiome sei dem Leser überlassen.

5) Natürlich ist für ein festes gegebenes  $n \in \mathbb{N}$  auch die Menge

$$P_n := \left\{ p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_kx^k, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, \dots, n \right\}$$

aller Polynome vom Grad  $\leq n$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Der Beweis ist analog zu  $P_2$  im vorherigen Beispiel.

- 6) Auch bei Polynomen kann man natürlich imaginäre Zahlen als Koeffizienten zulassen und gelangt so zu den komplexwertigen Polynomen vom Grad  $\leq n$ :

$$P_n := \left\{ p(z) \mid p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = \sum_{k=0}^n a_k z^k, a_i \in \mathbb{C}, \forall i = 0, \dots, n \right\}$$

Diese Menge bildet ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

- 7) Die Menge aller möglichen Polynome

$$\mathbb{R}[x] := \left\{ p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{k=0}^n a_k x^k, a_i \in \mathbb{R}, \forall i = 0, \dots, n, n \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

ist ebenfalls ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Man beachte den Unterschied zwischen  $\mathbb{R}[x]$  und  $P_n$ . Der Grad von Polynomen in  $\mathbb{R}[x]$  kann beliebig gross sein, während in  $P_n$  nur Polynome bis und mit zu einer festen Potenz  $n$  enthält. Wie wir später noch sehen werden, handelt es sich bei  $\mathbb{R}[x]$  um einen unendlichdimensionalen, bei  $P_n$  um einen endlich-dimensionalen Vektorraum.

- 8) Betrachten wir nun die Menge aller stetigen Funktion mit Definitionsbereich  $[0, 1]$ , also die Menge<sup>2</sup>

$$C([0, 1]) := \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \text{ stetig } \forall x \in [0, 1] \right\}.$$

- Die Addition auf dieser Menge ist die normale Addition von Funktionen. Für  $f, g \in C([0, 1])$  definiert man

$$\begin{aligned} f + g : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f + g)(x) &:= f(x) + g(x). \end{aligned}$$

Aus einem Satz der Analysis folgt, dass wenn zwei Funktionen  $f$  und  $g$  in  $x$  stetig sind, dass dann auch die Summe  $(f + g)$  in  $x$  stetig ist.

- Die Skalarmultiplikation ist ebenfalls die gewöhnliche Multiplikation einer Funktion  $f \in C([0, 1])$  mit einem Skalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x) \end{aligned}$$

und wenn  $f(x)$  stetig ist, dann ist es auch  $\lambda f(x)$ .

Wir wollen wieder nicht alle Vektorraum-Axiom nachprüfen, sondern beschränken uns auf drei beliebige. Welche Funktion in  $C([0, 1])$  spielt die Rolle des Nullvektors? Es ist die Funktion

$$f_0(x) = 0, \quad \forall x \in [0, 1],$$

denn für diese Funktion gilt

$$f(x) + f_0(x) = f(x), \quad \forall f \in C([0, 1])$$

und Axiom ii) ist erfüllt. Die Neutralität der Eins (Axiom vi)) ist erfüllt, denn

$$1 \cdot f(x) = f(x) \quad \forall f \in C([0, 1]).$$

Die negative Funktion zu einem  $f \in C([0, 1])$  ist die Funktion  $-f(x)$  und es gilt selbstverständlich

$$f(x) + (-f(x)) = f_0(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Also ist das Axiom iii) ebenfalls erfüllt. Die anderen Vektorraum-Axiome kann man auf die gleiche Art und Weise überprüfen. Es handelt sich bei  $C([0, 1])$  also um einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

---

<sup>2</sup>Die Bezeichnung mit dem Buchstaben  $C$  stammt vom französischen Wort "continu" für stetig. Der Begriff wurde von A.L. Cauchy (1789-1857) verwendet

## 5.2 Unterräume

In diesem Abschnitt lernen wir den Begriff des Unterraumes eines Vektorraums kennen. In einfachen Worten gesagt, ist ein Unterraum eine Teilmenge eines Vektorraums, welche selbst auch wieder ein Vektorraum ist, also die acht Vektorraum-Axiome erfüllt. Wir beginnen mit der genauen Definition des Unterraums:

### Definition 5.2.1 (Unterraum)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine nicht-leere Teilmenge  $U \subset V$  heisst **Unterraum** oder **Untervektorraum** von  $V$ , wenn  $U$  die folgenden zwei Eigenschaften erfüllt:

- i)  $u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
- ii)  $\lambda \in \mathbb{K}, u \in U \Rightarrow \lambda u \in U$

### Bemerkung:

Die Eigenschaften i) und ii) der Definition 5.2.1 bedeuten auch, dass  $U \subset V$  **abgeschlossen** ist bezüglich der Addition und der Skalarmultiplikation in  $V$ . Das heisst, "man kommt durch Addition und Skalarmultiplikation nicht aus  $U$  heraus".

### Satz 5.2.2

Eine nicht-leere Teilmenge  $U \subset V$  eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  ist genau dann ein Unterraum von  $V$ , wenn  $U$  selber auch wieder ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ist.

### Beispiele:

- 1) Betrachte den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V = \mathbb{R}^3$  und darin die Teilmenge

$$g = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dies ist eine Gerade im  $\mathbb{R}^3$ , die durch den Nullpunkt geht.

- i) Seien  $x_1$  und  $x_2$  zwei Vektoren der Geraden, d.h.

$$x_1 = t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 = t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$x_1 + x_2 = t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = (t_1 + t_2) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in g.$$

Somit ist für zwei Vektoren  $x_1$  und  $x_2$  auf der Geraden  $g$ , auch deren Summe  $x_1 + x_2$  in  $g$ .

- ii) Sei  $x \in g$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\lambda x = \lambda t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in g.$$

Dies bedeutet, dass auch ein beliebiges Vielfaches eines  $x \in g$  auf der Geraden  $g$  liegt.

Damit ist gezeigt, dass die Teilmenge  $g \subset \mathbb{R}^3$  die Eigenschaften aus der Definition 5.2.1 erfüllt. Die Gerade  $g$  ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ . Dies gilt nicht nur für die spezielle Gerade  $g$ , die wir hier gewählt haben, sondern für alle Geraden im  $\mathbb{R}^3$ , die durch den Nullpunkt gehen. Die Geraden, die *nicht* durch den Nullpunkt gehen, sind jedoch *keine* Unterräume. Für solche Geraden ist nämlich das Vektorraum-Axiom ii) nicht erfüllt, denn der Nullvektor ist dann nicht Bestandteil dieser Geraden.

- 2) Die gleiche Überlegung können wir auch für Ebenen im  $\mathbb{R}^3$  durch den Nullpunkt machen. Seien  $a, b \in \mathbb{R}^3$  zwei nicht kollineare Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  und

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = sa + tb, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

die Ebene, die von  $a$  und  $b$  aufgespannt wird. Wir überprüfen wieder, ob die Definition 5.2.1 erfüllt ist:

i) Seien  $x_1$  und  $x_2$  zwei Vektoren in der Ebene  $E$ , d.h.

$$x_1 = s_1 a + t_1 b, \quad s_1, t_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 = s_2 a + t_2 b, \quad s_2, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Dann ist

$$x_1 + x_2 = s_1 a + t_1 b + s_2 a + t_2 b = (s_1 + s_2)a + (t_1 + t_2)b \in E$$

ii) Sei  $x \in E$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\lambda x = \lambda(sa + tb) = \lambda sa + \lambda tb \in E.$$

Also sind alle Ebenen im  $\mathbb{R}^3$ , die durch den Nullpunkt gehen, ebenfalls Unterräume des  $\mathbb{R}^3$ . Jetzt haben wir also mit den Geraden und Ebenen 1- und 2-dimensionale Unterräume des  $\mathbb{R}^3$  gefunden. Es gibt noch zwei weitere Unterräume, die man in einem beliebigen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  findet:

- 3) Jeder  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  besitzt die trivialen Unterräume  $U = \{0\}$  und  $U = V$ . Also der Nullvektor und der ganze Raum  $V$  selber sind auch Unterräume.  $\{0\}$  ist der einzige 0-dimensionale Unterraum.
- 4) Sei  $V = \mathbb{K}^n$  und  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  eine beliebige gegebene  $m \times n$ -Matrix. Dann ist der Kern von  $A$ ,

$$\ker(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0 \right\},$$

ein Unterraum von  $\mathbb{K}^n$ . Zeigen wir dies:

- Seien  $x_1 \in \ker(A)$ ,  $x_2 \in \ker(A)$ . Dann ist

$$A(x_1 + x_2) = \underbrace{Ax_1}_0 + \underbrace{Ax_2}_0 = 0$$

und somit  $x_1 + x_2 \in \ker(A)$ .

- Sei  $x \in \ker(A)$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Dann gilt:

$$A(\lambda x) = \lambda(\underbrace{Ax}_0) = 0.$$

Also ist auch  $\lambda x \in \ker(A)$ .

Der Kern einer Matrix ist also immer ein Unterraum.

5) **Achtung:**

Seien  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  eine  $m \times n$ -Matrix und  $c \in \mathbb{K}^m$ ,  $c \neq 0$ , ein Vektor. Die Lösungsmenge des *inhomogenen* linearen Gleichungssystems,

$$L = \left\{ x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = c \right\},$$

ist **kein** Unterraum von  $\mathbb{K}^n$ .  $L$  enthält ja im Allgemeinen den Nullvektor nicht.

6) Im folgenden Beispiel betrachten wir Teilmengen der  $n \times n$ -Matrizen  $V = \mathbb{K}^{n \times n}$  :

a) Wir starten mit den Matrizen, welche die Determinante 1 haben, also

$$SL(n, \mathbb{K}) = \left\{ A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \det(A) = 1 \right\}.$$

- Sei  $A \in SL(n, \mathbb{K})$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Es gilt

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \neq 1$$

und somit  $A \notin SL(n, \mathbb{K})$ . Somit ist  $SL(n, \mathbb{K})$  **kein** Unterraum.

- Man kann auch einfach ein Gegenbeispiel finden. Die  $2 \times 2$ -Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

haben beide Determinante 1, also  $A, B \in SL(2, \mathbb{K})$ . Aber

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist die Nullmatrix und hat sicher nicht Determinante 1.

b) Das gleiche Argument funktioniert auch für die regulären (invertierbaren) Matrizen

$$GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathbb{K}^{n \times n} \mid \text{rang}(A) = n\}.$$

$GL(n, \mathbb{K})$  kann **kein** Unterraum sein, denn die Nullmatrix  $0$  ist nicht invertierbar und ist somit  $0 \notin GL(n, \mathbb{K})$ . Das obige Gegenbeispiel für  $SL(n, \mathbb{K})$  liefert übrigens auch für  $GL(n, \mathbb{K})$  einen Widerspruch.

c) Als nächstes sehen wir uns die (reellen) symmetrischen bzw. anti-symmetrischen Matrizen an. Die Menge der symmetrischen Matrizen ist gegeben durch

$$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = A\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Wir zeigen:

- Seien  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch. Dann ist

$$(A + B)^T = A^T + B^T = A + B,$$

also  $A + B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist auch wieder symmetrisch.

- Wenn  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  symmetrisch ist und  $\lambda \in \mathbb{K}$ , dann gilt:

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda A,$$

also ist auch  $\lambda A$  symmetrisch. Damit bilden die symmetrischen Matrizen einen Unterraum von  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

Für die antisymmetrischen Matrizen

$$\{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^T = -A\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$$

verfährt man genau gleich, um zu zeigen, dass es sich dabei um ebenfalls um einen Unterraum handelt.

d) Wie sieht es mit den hermiteschen und anti-hermiteschen Matrizen aus? Die Menge der hermiteschen Matrizen

$$\{H \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid H^* = H\} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$$

sind eine Teilmenge des  $\mathbb{C}$ -Vektorraums  $\mathbb{C}^{n \times n}$ . Schauen wir, ob diese Menge ein Unterraum ist:

- Für zwei hermitesche Matrizen  $H$  und  $J$  gilt:

$$(H + J)^* = H^* + J^* = H + J,$$

also ist die Summe  $H + J$  wieder hermitesch.

- Für eine hermitesche Matrix  $H$  und ein  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt:

$$(\lambda H)^* = \bar{\lambda} H^* = \bar{\lambda} H$$

Das heisst  $\lambda H$  ist nicht hermitesch und somit bilden die hermiteschen Matrizen keinen Unterraum. Ebenso sind auch die anti-hermiteschen Matrizen kein Unterraum.

**Bemerkung:**

Nun ist es aber so, dass man die komplexen Matrizen  $\mathbb{C}^{n \times n}$  mit den reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  als Körper versehen kann. Dann ist  $\mathbb{C}^{n \times n}$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. In diesem Fall werden die hermiteschen Matrizen als Teilmenge tatsächlich zu einem Unterraum, denn da man als Körper jetzt die reellen Zahlen gewählt hat, hat man nur  $\lambda \in \mathbb{R}$  als Skalare zur Verfügung und dann ist für eine hermitesche (bzw. anti-hermitesche) Matrix  $H$  die Matrix  $\lambda H$  ebenfalls hermitesch (bzw. anti-hermitesch).

7) Betrachte den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V = P_3$  der Polynome vom Grad  $\leq 3$  und darin die Teilmenge

$$P_2 = \left\{ p(x) \mid p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

der Polynome vom Grad  $\leq 2$ . Es ist klar, dass wenn man zwei Polynome aus  $P_2$  addiert oder ein Polynom aus  $P_2$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}$  multipliziert, wieder ein Polynom aus  $P_2$  dabei rauskommt.

- 8) Als letztes Beispiel betrachten wir den Vektorraum der stetigen Funktionen  $V = C([a, b])$  mit Definitionsbereich  $[a, b]$ . Eine Teilmenge davon sind die stetig differenzierbaren Funktionen auf  $[a, b]$ , also diejenigen Funktionen, die man auf dem ganzen Definitionsbereich  $[a, b]$  ableiten kann und deren Ableitung stetig ist. Diese Menge bezeichnet man mit

$$C^1([a, b]) := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \text{ stetig diff.bar } \forall x \in [a, b] \right\}.$$

Da wir aus der Analysis die folgenden Regeln für das Ableiten kennen:

- Für zwei Funktionen  $f, g \in C^1([a, b])$  gilt:

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

- Für ein  $f \in C^1([a, b])$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  gilt:

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

ist klar, dass es sich bei  $C^1([a, b])$  um einen Unterraum von  $C([a, b])$  handelt.

## 5.3 Lineare Unabhängigkeit

Wir lernen nun das wichtige Konzept der linearen Unabhängigkeit von Vektoren kennen. Wir haben dieses Thema bereits mehrfach gestreift, ohne es genauer zu benennen. Wenn zwei Vektoren kollinear zueinander sind, also der eine Vektor ein Vielfaches des anderen ist, so können diese beiden Vektoren keine Ebene im  $\mathbb{R}^3$  aufspannen. Solche zwei Vektoren sind *linear abhängig*. Sind die beiden Vektoren nicht kollinear, dann spannen sie eine Ebene auf und man nennt die Vektoren *linear unabhängig*. In diesem Abschnitt werden wir dieses Konzept auf allgemeine Vektorräume und eine beliebige Menge von Vektoren verallgemeinern. Dazu benötigen wir zuerst die Begriffe Linearkombination und lineare Hülle:

### 5.3.1 Linearkombination und lineare Hülle

#### Definition 5.3.1 (Linearkombination)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Für ein festes  $n \in \mathbb{N}$  seien  $v_1, \dots, v_n \in V$  beliebige Vektoren aus  $V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  beliebige Skalare aus dem Körper  $\mathbb{K}$ . Dann definiert

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in V$$

eine **Linearkombination** der Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  (über  $\mathbb{K}$ ).

#### Beispiele:

- 1)  $V = \mathbb{R}^3$ . Seien

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ . Eine Linearkombination von  $a$  und  $b$  ist z.B. der Vektor

$$-\frac{2}{3}a + 2b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2/3 \end{pmatrix}.$$

- 2) Quadratische Polynome  $V = P_2$ . Seien

$$p_1(x) = 3, \quad p_2(x) = x^2, \quad p_3(x) = -2x$$

drei Polynome in  $P_2$ . Dann ist z.B.

$$5p_1(x) + 2p_2(x) - p_3(x) = 15 + 2x + 2x^2$$

eine Linearkombination von  $p_1(x)$ ,  $p_2(x)$  und  $p_3(x)$ .

3)  $V = \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . Gegeben seien die drei antisymmetrischen Matrizen

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist z.B. die Matrix

$$2J_1 - 2J_2 + J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

eine Linearkombination von  $J_1$ ,  $J_2$  und  $J_3$  und natürlich wieder antisymmetrisch, weil die antisymmetrischen Matrizen einen Unterraum bilden.

4) Stetige Funktionen auf dem Intervall  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ,  $V = C([0, 1])$ . Betrachte z.B. die stetigen Funktionen

$$f_1(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right|, \quad \text{und} \quad f_2(x) = \sin(x).$$

Dann ist die Funktion

$$\sqrt{2}f_1(x) - \frac{1}{3}f_2(x) = \sqrt{2} \left| x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{3} \sin(x)$$

eine Linearkombination von  $f_1$  und  $f_2$  und natürlich ebenfalls stetig auf  $[0, 1]$ .

Aus den vorherigen Beispielen sehen wir, dass man durch Bildung von Linearkombinationen weitere Vektoren im Vektorraum erzeugen kann. Die Menge von neuen Vektoren, die man durch *alle* diese möglichen Linearkombinationen erzeugen kann, ist die sogenannte *lineare Hülle*. Die lineare Hülle ist also wie folgt definiert:

**Definition 5.3.2 (lineare Hülle)**

Seien  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $S \subset V$  eine Teilmenge von  $V$ .

i) Seien  $v_1, \dots, v_n \in V$ ,  $n \in \mathbb{N}$  beliebige Vektoren in  $V$ . Die Menge aller Linearkombinationen von  $v_1, \dots, v_n$

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) := \left\{ v \in V \mid v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}$$

heißt die **lineare Hülle** von  $v_1, \dots, v_n$ .

ii) Sei  $S \subset V$  eine nicht leere Teilmenge von  $V$ . Dann ist die **lineare Hülle** von  $S$  definiert durch

$$\text{span}(S) := \left\{ v \in V \mid v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, v_i \in S, \lambda_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Zusätzlich legen wir noch fest:

$$\text{span}(\emptyset) := \{0\},$$

d.h. die lineare Hülle der leeren Menge ist die Menge, die nur den Nullvektor enthält.

Also nochmal langsam: ich habe einen Vektorraum  $V$  und eine Teilmenge  $S$  davon und ich nehme irgendwelche Vektoren aus  $S$  und mache alle erdenklichen Linearkombinationen damit. Und da, wo ich damit hinkomme, das ist die lineare Hülle. Aha, aber wo komme ich denn eigentlich hin damit? Intuitiv ist schonmal klar, dass ich mit den Linearkombinationen aus  $S$  rauskomme, also

$$\text{span}(S) \supset S$$

Ebenso klar ist, dass wir durch lineares Kombinieren von Vektoren niemals aus  $V$  rauskommen können. Die Vektorraumaxiome bremsen uns da aus, denn sie besagen, solange man addiert und skalarmultipliziert bleibt man in  $V$  drin. Das heißt also auch

$$\text{span}(S) \subset V.$$

Die lineare Hülle liegt also irgendwo zwischen  $S$  und  $V$ ,

$$S \subset \text{span}(S) \subset V.$$

Wo und wie genau beantwortet der folgende Satz:

**Satz 5.3.3**

Seien  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $S \subset V$  eine Teilmenge von  $V$ . Die lineare Hülle  $\text{span}(S)$  ist ein Unterraum von  $V$ .

**Bemerkung:**

Man sagt:  $\text{span}(S)$  ist der von  $S$  **aufgespannte** Unterraum von  $V$ .

*Beweis.* i) Seien  $s_1, s_2 \in S$ . Dann sind  $s_1$  und  $s_2$  Linearkombination von irgendwelchen Vektoren aus  $S$ . Da aber die Summe von zwei Linearkombinationen wieder eine Linearkombination ist, ist auch  $s_1 + s_2$  eine Linearkombination von Vektoren aus  $S$  und damit ist  $s_1 + s_2 \in \text{span}(S)$ .

ii) Sei  $s \in S$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Da  $s$  eine Linearkombination aus  $S$  ist, ist auch  $\lambda s$  eine Linearkombination aus  $S$  und somit  $\lambda s \in \text{span}(S)$ .  $\square$

**Beispiele:**

Wir untersuchen fast noch einmal die gleichen Beispiele wie vorher zu den Linearkombinationen:

1) Seien wieder

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ .

- Die von diesen Vektoren aufgespannte lineare Hülle ist offensichtlich die Ebene

$$E = \text{span}(a, b) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = sa + tb, \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nach Satz 5.3.3 ist  $E$  ein Unterraum des  $\mathbb{R}^3$ . Dies sieht man auch daran, dass es sich um eine Ebene durch den Nullpunkt handelt.

- Fügen wir zu den Vektoren  $a$  und  $b$  noch den Vektor

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3a + b$$

hinzu. Was ist die lineare Hülle von  $a$ ,  $b$  und  $c$ ? Da  $c$  eine Linearkombination von  $a$  und  $b$  ist, also  $c$  in der von  $a$  und  $b$  aufgespannten Ebene liegt, "gewinnt" man mit dem Vektor  $c$  nichts dazu, es gilt:

$$\text{span}(a, b, c) = \text{span}(a, b) = E.$$

Die drei Vektoren  $a$ ,  $b$  und  $c$  spannen also immer noch bloss die Ebene  $E$  auf.

- Hätten wir stattdessen z.B. den Vektor

$$\hat{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

genommen, dann erhielten wir

$$\text{span}(a, b, \hat{c}) = \mathbb{R}^3,$$

denn  $\hat{c} \notin E$ .

2) Polynome in  $P_2$ : Seien

$$p_1(x) = 3, \quad p_2(x) = x^2, \quad p_3(x) = -2x$$

drei Polynome in  $P_2$ . Dann ist

$$\text{span}(p_1, p_2, p_3) = P_2.$$

Da unter den drei Polynomen je ein konstantes, ein lineares und ein quadratisches Polynom ist, können wir nämlich jedes quadratische Polynom in  $P_2$  als Linearkombination in  $p_1$ ,  $p_2$  und  $p_3$  schreiben. Zum Beispiel ist

$$p(x) = 6 - 2x - 2x^2 = 2 \cdot 3 + (-2)x^2 + 1 \cdot (-2x) = 2p_1(x) - 2p_2(x) + p_3(x).$$

Wie im letzten Beispiel gesehen, kann also der von einigen Vektoren aufgespannte Unterraum sogar der ganze Vektorraum sein. Wenn dem so ist, hat man folgende Eigenschaft erreicht. Man kann dann nämlich jeden Vektor im ganzen Vektorraum durch eine Linearkombination dieser wenigen Vektoren, von denen er aufgespannt wird, ausdrücken. Es genügen dann also ein paar wenige Vektoren (meistens eine endliche Anzahl) um den ganzen Vektorraum zu beschreiben. Diese Menge von Vektoren nennt man dann ein Erzeugendensystem.

### 5.3.2 Erzeugendensystem

#### Definition 5.3.4 (Erzeugendensystem)

Seien  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $S \subset V$  eine Teilmenge von  $V$ .  $S$  heisst **Erzeugendensystem** von  $V$ , falls

$$\text{span}(S) = V,$$

d.h.  $S$  spannt den gesamten Vektorraum  $V$  auf.

#### Satz 5.3.5

Seien  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $S \subset V$  eine Teilmenge von  $V$ .  $S$  ist genau dann ein Erzeugendensystem, falls für jedes  $v \in V$ :

$$\forall v \in V : \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} : v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i.$$

Dies bedeutet, dass sich jedes  $v \in V$  als Linearkombination der Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  ausdrücken lässt.

*Beweis.* Der Beweis des “Rückweges”  $\Leftarrow$  ist klar, denn wenn man jedes  $v \in V$  als Linearkombination von Vektoren aus  $S$  schreiben kann, dann ist auch jedes  $v \in \text{span}(S)$  und somit  $\text{span}(S) = V$ .

Der Beweis des “Hinwegs”  $\Rightarrow$  dieses Satzes ist ebenfalls einfach: wenn es einen Vektor  $v \in V$  gäbe, den man nicht als Linearkombination mit Vektoren aus  $S$  schreiben könnte, dann wäre dieser Vektor  $v \notin \text{span}(S)$  und daher  $\text{span}(S) \neq V$ .  $\square$

#### Beispiele:

- 1) Die Menge  $\{1, x, x^2\}$  ist ein Erzeugendensystem der quadratischen Polynome  $P_2$ , denn logischerweise kann ich jedes quadratische Polynom schreiben als

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2.$$

- 2) Eine beliebige antisymmetrische  $3 \times 3$ -Matrix ist immer von der Form

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Also bilden die drei Matrizen

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ein Erzeugendensystem des Unterraums der antisymmetrischen Matrizen.

- 3) Die Menge  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  ist ein Erzeugendensystem der Menge der Polynome  $\mathbb{R}[x]$ .

Wie das letzte Beispiel zeigt, genügt eine endliche Anzahl von Vektoren nicht immer, um ein Erzeugendensystem zu bilden. In der linearen Algebra unterscheidet man deshalb zwischen endlich-erzeugten Vektorraum und unendlich-dimensionalen Vektorräumen. Während der Vektorraum  $P_n$  der Polynome vom Grad  $\leq n$  endlich-erzeugt ist, ist zum Beispiel der Vektorraum der stetigen Funktionen  $C(\mathbb{R})$  ein unendlich-dimensionaler Vektorraum ist. Wir halten deshalb fest:

#### Definition 5.3.6 (Endlich-dimensionaler Vektorraum)

Ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  heisst **endlich-erzeugt** oder **endlich-dimensional**, falls es eine endliche Anzahl Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  gibt, die  $V$  erzeugen, d.h.

$$\text{span}(v_1, \dots, v_n) = V.$$

### 5.3.3 Lineare Unabhängigkeit

#### Definition 5.3.7 (Lineare Unabhängigkeit)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n \in V$  sind **linear unabhängig**, falls folgendes gilt:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Umgekehrt sind  $v_1, \dots, v_n \in V$  **linear abhängig**, wenn es Skalare  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  gibt, die nicht alle gleich null sind, sodass

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0.$$

Sind die Vektoren linear abhängig, ist also der Nullvektor eine nicht-triviale Linearkombination von  $v_1, \dots, v_n$ .

#### Satz 5.3.8

- i) Der Nullvektor  $0 \in V$  ist linear abhängig.
- ii) Ein einzelner Vektor  $v \in V$  ist linear unabhängig.
- iii) Die Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  sind genau dann linear abhängig, wenn sich mindestens einer dieser Vektoren, als Linearkombination, der anderen ausdrücken lässt.

#### Beispiele:

1) Seien

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^3$ . Sind diese Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig? Wir stellen zuerst einmal fest, dass einer der beiden Fälle eintreten muss, ein Zwischending zwischen linearer Abhängigkeit und Unabhängigkeit gibt es nicht. Wir müssen das homogene lineare Gleichungssystem

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b = 0$$

oder eben

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

lösen. Wir wissen aus dem Abschnitt 3.3.5, dass  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  sicher eine Lösung ist.  $a$  und  $b$  sind genau dann linear unabhängig, wenn dies die einzige Lösung ist. Gibt es noch andere Lösungen, dann sind sie linear abhängig. Wir lösen also

$$\begin{array}{cc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \\ \hline 0 & 2 & \\ 0 & 3 & \\ 1 & 0 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \\ \hline 1 & 0 & \\ 0 & 2 & \\ 0 & 0 & \end{array}$$

Der Rang des Gleichungssystems ist 2, d.h. es gibt nur die Lösung  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , die Vektoren sind linear unabhängig.

2) Seien

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

drei Vektoren im  $\mathbb{R}^2$ . Sind diese Vektoren linear unabhängig oder linear abhängig? Hier ist der Fall klar, da es drei Vektoren in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  sind, müssen sie linear abhängig sein. Lösen wir das homogene lineare Gleichungssystem erhält man

$$\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & \\ 1 & 0 & 1 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 1 & 2 & 2 & \\ 0 & 2 & 1 & \end{array}$$

Da  $\lambda_3$  ein freier Parameter ist, wählen wir z.B.  $\lambda_3 = -1$ . Dann ist  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$  und  $\lambda_1 = 1$ . Es gilt also

$$a + \frac{1}{2}b - c = 0$$

und somit

$$c = a + \frac{1}{2}b.$$

3) Betrachten wir noch einmal die Polynome

$$p_1(x) = 3, \quad p_2(x) = x^2, \quad p_3(x) = -2x$$

im Vektorraum  $P_2$ . Sind diese linear unabhängig? Hier müssen wir die Gleichung

$$\lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = \lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 \cdot (-2x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

betrachten. Weil diese Gleichung  $\forall x \in \mathbb{R}$  gelöst werden soll, können wir für  $x$  irgendwelche Werte auswählen:

$$\begin{aligned} x = 0 : 3\lambda_1 &= 0 \\ x = -1 : 3\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ x = 1 : 3\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt sofort, dass  $\lambda_1 = 0$  sein muss. Dann liefern die beiden anderen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -2\lambda_3 \\ \lambda_2 &= 2\lambda_3. \end{aligned}$$

Addiert man diese beiden Gleichung ist klar, dass auch  $\lambda_2 = 0$ . Dies hat dann aber auch  $\lambda_3 = 0$  zur Folge. Dies ist die einzige mögliche Lösung, die drei Polynome sind linear unabhängig.

4) Wie schaut es zum Beispiel mit den drei Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

aus? Linear unabhängig oder abhängig? Wir müssen das homogene lineare Gleichungssystem

$$\lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2 + \lambda_3 \sigma_3 = \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 - i\lambda_2 \\ \lambda_1 + i\lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

lösen. Man sieht leicht, dass als Lösung nur  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$  möglich ist, also sind die Pauli-Matrizen linear unabhängig. Eigentlich ist es ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten und vier Gleichungen:

$$\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & \\ 1 & -i & 0 & \\ 1 & i & 0 & \\ 0 & 0 & -1 & \end{array},$$

welches Rang 3 hat.

5) Betrachten wir noch die drei Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im  $\mathbb{R}^3$ . Das homogene lineare Gleichungssystem ist

$$\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & \\ 1 & -1 & 1 & \\ 1 & 5 & 3 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline \boxed{1} & 2 & 1 & \\ 0 & \boxed{-3} & 0 & \\ 0 & 3 & 2 & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline \boxed{1} & 2 & 1 & \\ 0 & \boxed{-3} & 0 & \\ 0 & 0 & \boxed{2} & \end{array}$$

Die drei Vektoren sind linear unabhängig.

### Definition 5.3.9

Eine Teilmenge  $S \subset V$  eines  $\mathbb{K}$ -Vektorraums heisst linear unabhängig, falls für jede Teilmenge  $\{v_1, \dots, v_k\} \subset S$  die Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  linear unabhängig sind. Ausserdem legen wir noch fest, dass die leere Menge  $\emptyset$  linear unabhängig ist.

Zum Abschluss dieses Abschnitts beweisen wir noch das Schrittlema, das uns erklärt, wie man eine linear unabhängige Menge durch Hinzufügen von weiteren Vektoren vergrössern kann.

### Lemma 5.3.10 (Schrittlema)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig. Sei  $v \in V$  ein Vektor, sodass  $v \notin \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ . Dann sind  $v, v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig.

*Beweis.* Wir untersuchen die Gleichung

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Wenn  $\lambda \neq 0$  ist, dann folgt:

$$v = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} v_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} v_n.$$

Dann wäre  $v$  eine Linearkombination von  $v_1, \dots, v_n$  und somit  $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_n)$ , was nicht sein kann. Also muss  $\lambda = 0$ . Dann ist aber auch

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

und daraus folgt  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ , weil ja  $v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig sind. Also sind auch  $v, v_1, \dots, v_n$  linear unabhängig.  $\square$

Fügt man also zu einer linear unabhängigen Menge Vektoren hinzu, welche nicht zur linearen Hülle der Menge gehören, so bleibt die Menge linear unabhängig.

## 5.4 Basis und Dimension

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass man mit einem Erzeugendensystem  $S$  eines Vektorraums  $V$  alle Vektoren in  $V$  als Linearkombinationen von Vektoren aus  $S$  schreiben kann. Die Vektoren im Erzeugendensystem können jedoch linear abhängig sein, d.h. mindestens ein Vektor aus  $S$  kann also immer noch als Linearkombination von anderen Vektoren aus  $S$  ausgedrückt werden. Somit können wir diesen Vektor aber aus  $S$  entfernen und haben immer noch ein Erzeugendensystem. In diesem Abschnitt überlegen wir uns, wie man ein Erzeugendensystem so lange kleiner machen kann, bis die minimale Anzahl von Vektoren im Erzeugendensystem gefunden ist. Dieses kleinste Erzeugendensystem eines Vektorraums  $V$  nennt man eine Basis.

### Motivationsbeispiel

Betrachten wir den Vektorraum  $V = \mathbb{R}^3$  und darin einen beliebigen Vektor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Halten wir kurz inne und überlegen uns, was diese Notation als Spaltenvektor schon wieder bedeutet. Im Grunde verstehen wir darunter nämlich die folgende Linearkombination

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3,$$

wobei

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die drei Einheitsvektoren entlang den Koordinatenachsen sind. Offensichtlich ist

$$\text{span}(e_1, e_2, e_3) = \mathbb{R}^3,$$

die drei Vektoren  $e_1, e_2$  und  $e_3$  sind ein Erzeugendensystem des  $\mathbb{R}^3$ . Natürlich sind diese Vektoren auch linear unabhängig, denn das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline \boxed{1} & 0 & 0 & \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \end{array}$$

hat den Rang 3. Die Menge von Vektoren  $\{e_1, e_2, e_3\}$  ist also Erzeugendensystem und linear unabhängig und diese beiden Eigenschaften definieren eine Basis eines Vektorraums. Die Darstellung eines Vektors

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$$

durch Koordinaten  $v_1, v_2$  und  $v_3$  wird dadurch nämlich eindeutig. Und auch die Anzahl der Vektoren in der Basis ist offensichtlich fix. Wenn man nämlich einen Vektor aus  $\{e_1, e_2, e_3\}$  entfernt, ist die Menge kein Erzeugendensystem mehr vom  $\mathbb{R}^3$ . Wenn man dagegen einen vierten Vektor hinzufügt, dann ist die Menge nicht mehr linear unabhängig. Es folgt die allgemeine Definition einer Basis:

**Definition 5.4.1 (Basis)**

Seien  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $B \subset V$  eine Teilmenge von  $V$ .  $B$  heisst **Basis** des Vektorraums  $V$ , wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- i)  $B$  ist linear unabhängig.
- ii)  $B$  ist ein Erzeugendensystem von  $V$ , d.h.  $\text{span}(B) = V$ .

Es stellt sich natürlich sofort die Frage, ob es denn immer möglich ist, eine Basis eines Vektorraums zu finden. Wir beschränken uns hier auf endlich erzeugte Vektorräume. Auf unendlich-dimensionale Vektorräume gehen wir kurz im nächsten Abschnitt ein. Wir zeigen hier zuerst, wie man eine Basis eines endlich-erzeugten Vektorraums konstruieren kann.

**Satz 5.4.2 (Basisergänzungssatz)**

Sei  $V$  ein endlich-erzeugter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum.

- i) Seien  $v_1, \dots, v_l$  linear unabhängig. Dann existiert eine Basis von  $V$  der Form

$$B = \{v_1, \dots, v_l, v_{l+1}, \dots, v_n\}$$

- ii) Sei  $S = \{v_1, \dots, v_k\}$  ein Erzeugendensystem von  $V$ . Dann gibt es eine Basis  $B$  von  $V$ , die in  $S$  enthalten ist,  $B \subset S$ .

Satz 5.4.2 besagt, dass man eine Basis eines endlich-erzeugten Vektorraums bekommen kann, indem man mit einem Vektor  $v_1 \in V$  startet und dann sukzessive linear unabhängige Vektoren hinzufügt. Oder man startet mit einem Erzeugendensystem von  $V$  und verkleinert dieses so lange, bis es linear unabhängig ist. Eine direkte Folgerung davon ist natürlich:

**Korollar 5.4.3**

Jeder endlich-erzeugte  $\mathbb{K}$ -Vektorraum besitzt eine Basis.

Wir beweisen den Satz 5.4.2:

*Beweis.* i) Sei  $S = \{u_1, \dots, u_k\}$  ein Erzeugendensystem von  $V$ . Ein solches gibt es sicher, denn  $V$  ist ja endlich-erzeugt.

- Sind alle  $u_i, i = 1, \dots, k$ , Linearkombinationen der linear unabhängigen Vektoren  $v_1, \dots, v_l$ , dann sind wir fertig, denn dann ist  $\{v_1, \dots, v_l\}$  schon eine Basis.
- Wenn nicht, dann gibt es mindestens ein  $u_i$  in  $S$ , sodass  $u_i \notin \text{span}(v_1, \dots, v_l)$ . Wir wählen (wenn es mehrere gibt) dasjenige  $u_{i_1}$  mit dem kleinsten  $i$ , setzen  $v_{l+1} := u_{i_1}$  und fügen es zu den Vektoren  $v_1, \dots, v_l$  hinzu. Aufgrund des Schrittlemmas 5.3.10 ist  $\{v_1, \dots, v_l, v_{l+1}\}$  immer noch linear unabhängig.

- Nun geht es weiter: entweder wir können alle  $u_i$  mit  $i > i_1$  als Linearkombination von  $\{v_1, \dots, v_l, v_{l+1}\}$  schreiben, dann haben wir die Basis. Wenn nicht, dann muss ein weiteres  $u_{i_2}$  zu der Liste der linear unabhängigen Vektoren  $v_k$  hinzugefügt werden, also  $v_{l+2} := u_{i_2}$ .
- So oder so werden wir am Ende des Prozesses bei einer Basis landen, spätestens dann wenn wir alle  $u_i$  aufgebraucht haben.

ii) Wir nehmen aus dem Erzeugendensystem  $S$  den Vektor  $v_1$  heraus. Dieser ist linear unabhängig. Nun haben wir die gleiche Situation wie in i). Wir führen die gleiche Konstruktion durch, d.h. wir fügen sukzessive Vektoren aus  $S$  hinzu, sodass die Vektoren linear unabhängig bleiben und am Ende haben wir eine Basis  $B \subset S$  gefunden.

Einen Spezialfall müssen wir hier noch kurz abhandeln: was ist eigentlich die Basis des Vektorraums  $\{0\}$ , welcher nur den Nullvektor enthält? Es ist tatsächlich die leere Menge  $\emptyset$ . Wir haben nämlich in Definition 5.3.9 festgelegt, dass  $\emptyset$  linear unabhängig ist. In der Definition 5.3.2 haben wir festgelegt, dass  $\emptyset$  ein Erzeugendensystem von  $\{0\}$  ist. Damit erfüllt  $\emptyset$  beide Bedingungen und ist die (einzige) Basis von  $\{0\}$ .  $\square$

Jetzt kann man sich natürlich fragen, ob die Anzahl von Basisvektoren einer Basis eines endlich-erzeugten Vektorraums eindeutig ist. Die Antwort ist tatsächlich ja! Beweisen kann man dies mit Hilfe des Austauschlemmas:

**Lemma 5.4.4 (Austauschlemma)**

Sei  $V$  ein endlich-erzeugter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Seien  $u_1, \dots, u_k \in V$  linear unabhängig und  $\{v_1, \dots, v_l\}$  ein Erzeugendensystem. Dann gibt es ein  $i \in \{1, \dots, l\}$ , sodass  $v_i, u_1, \dots, u_{k-1}$  linear unabhängig sind.

*Beweis.* Da  $\{v_1, \dots, v_l\}$  ein Erzeugendensystem ist, kann man  $u_k$  als Linearkombination

$$u_k = \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{K}$$

schreiben. Wir behaupten nun, dass es ein unter den Vektoren  $v_1, \dots, v_l$  einen Vektor  $v_i \notin \text{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$  gibt und beweisen diese Behauptung durch Widerspruch. Wenn nämlich alle  $v_i \in \text{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$  wären, dann wäre

$$u_k = \sum_{i=1}^l \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^l \lambda_i \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j u_j.$$

Das bedeutet aber, dass dann  $u_k$  eine Linearkombination von  $u_1, \dots, u_{k-1}$  sein müsste und das ist ein Widerspruch. Das beweist die Behauptung, dass es mindestens einen Vektor  $v_i \notin \text{span}(u_1, \dots, u_{k-1})$  geben muss. Aufgrund des Schrittlemmas 5.3.10 ist dann aber die Menge  $\{v_i, u_1, \dots, u_{k-1}\}$  linear unabhängig.  $\square$

**Korollar 5.4.5**

Sei  $V$  ein endlich-erzeugter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $\{u_1, \dots, u_m\}$  linear unabhängig, sowie  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ein Erzeugendensystem. Dann ist  $m \leq n$ .

*Beweis.* Man wendet einfach das Austauschprinzip mehrmals an:

$u_1, \dots, u_m$	linear unabhängig	
$v_{i_1}, u_1, \dots, u_{m-1}$	linear unabhängig	
$v_{i_2}, v_{i_1}, u_1, \dots, u_{m-2}$	linear unabhängig	
...		
$v_{i_{m-1}}, \dots, v_{i_1}, u_1$	linear unabhängig	
$v_{i_m}, v_{i_{m-1}}, \dots, v_{i_1}$	linear unabhängig	$\square$

**Korollar 5.4.6**

Die Anzahl Vektoren einer Basis  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  eines endlich-erzeugten  $\mathbb{K}$ -Vektorraums  $V$  ist eindeutig bestimmt. Das heisst, zwei Basen eines Vektorraums haben gleich viele Elemente.

*Beweis.* Seien  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  und  $\tilde{B} = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m\}$  zwei Basen von  $V$ . Da sowohl  $B$  und  $\tilde{B}$  sowohl linear unabhängig und erzeugend sind, kann aus Korollar 5.4.5 sowohl  $m \leq n$  als auch  $n \leq m$  gefolgert werden. Das bedeutet aber, dass  $m = n$ .  $\square$

Aus den Sätzen 5.4.6 und 5.4.3 folgt also, dass die Anzahl von Vektoren in einer Basis eines endlich-dimensionalen Vektorraums eine feste natürliche Zahl ist und für verschiedene Basen ein und desselben Vektorraums immer gleich ist. Dies veranlasst uns zu folgender Definition für die Dimension eines Vektorraums:

**Definition 5.4.7 (Dimension)**

Die **Dimension** eines endlich-erzeugten  $\mathbb{K}$ -Vektorraums ist die Anzahl Vektoren irgendeiner Basis  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$ . Ist  $V$  nicht endlich-erzeugt, dann heisst  $V$  **unendlich-dimensional**.

Man schreibt für endlich-dimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorräume  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$  und für unendlich-dimensionale Vektorräume  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \infty$ .

**Beispiele von Basen:**

1) Wir haben bereits die Basis  $\{e_1, e_2, e_3\}$  des  $\mathbb{R}^3$  kennengelernt. Diese Basis kann man auf den Vektorraum  $V = \mathbb{R}^n$  verallgemeinern:

**Definition 5.4.8 (Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ )**

Die  $n$  Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden die sogenannte **Standardbasis** des  $\mathbb{R}^n$ .

2) Gegeben sei die Ebene

$$E = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

im  $\mathbb{R}^3$ .

- a) Ist  $E$  ein Unterraum?
- b) Finde eine Basis von  $E$

**Lösung:**

- a) Ja. Es handelt sich um eine Ebene durch den Nullpunkt. Die Ebenen durch 0 sind die zweidimensionalen Unterräume des  $\mathbb{R}^3$ .
- b) Wir benötigen zwei linear unabhängige Vektoren, die in der Ebene liegen. Wir müssen also die Koordinatengleichung in die Parameterdarstellung umwandeln. Zwei Vektoren der Ebene sind z.B.

$$a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Diese zwei Vektoren sind linear unabhängig und spannen die Ebene auf:

$$E = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = sa + tb, \quad s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Sei  $V = P_2$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$ . Die Polynome

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2$$

bilden eine Basis des  $P_2$ . Eine andere Basis des  $P_2$  wäre z.B.

$$q_1(x) = 3, \quad q_2(x) = x^2, \quad q_3(x) = -2x.$$

Es gibt verschiedene Möglichkeiten für die Wahl einer Basis. Hier haben wir z.B. die zwei Basen  $\{p_1, p_2, p_3\}$  und  $\{q_1, q_2, q_3\}$  aufgestellt. Unendlich viele weitere Basen sind möglich. Keine Basis ist besser als die andere. Welche man verwendet, hängt von der Problemstellung ab.

Was es mit der Wahl von verschiedenen Basen in einem Vektorraum auf sich hat, wollen wir anhand des folgenden Beispiels sehen. Im Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  kennen wir natürlich die Standardbasis  $\{e_1, e_2, e_3\}$ . Betrachten wir den Vektor

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2e_1 + 3e_2 + e_3$$

im  $\mathbb{R}^3$ . Die obige Notation des Vektors als Spaltenvektor ist bezüglich der Basis  $\{e_1, e_2, e_3\}$  zu verstehen. Eine andere Basis des  $\mathbb{R}^3$  ist z.B.  $\{b_1, b_2, b_3\}$ , wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Wir haben im letzten Abschnitt gezeigt, dass diese Vektoren linear unabhängig sind. Damit sind sie eine Basis. Das heisst, der Vektor  $v$  kann auch bezüglich  $\{b_1, b_2, b_3\}$  ausdrücken, nämlich

$$v = \frac{8}{3}b_1 - \frac{1}{3}b_2 + 0 \cdot b_3.$$

Der Vektor  $v \in \mathbb{R}^3$  ist also bezüglich der Basis  $\{b_1, b_2, b_3\}$  gegeben durch

$$v = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{8}{3}b_1 + \left(-\frac{1}{3}\right)b_2 + 0 \cdot b_3.$$

Das Beispiel zeigt, dass – sobald man einen Vektor als Koordinatenvektor in eine Spalte schreibt – man eigentlich immer angeben muss, bezüglich welcher Basis der Vektor angegeben ist. Häufig lässt man die Angabe der Basis weg, weil sowieso die Standardbasis  $\{e_1, e_2, e_3\}$  gemeint ist. Aber sobald man Basen wechselt, ist hier Vorsicht geboten. Die Wahl einer Basis entspricht der Wahl eines Koordinatensystems im Vektorraum. Wenn man nicht angibt, in welcher Basis man rechnet (d.h. in welchen Koordinaten), dann ist eigentlich nicht klar, welchen Vektor man meint.

#### Satz 5.4.9 (Koordinatenvektor)

Seien  $V$  ein endlich-erzeugter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis von  $V$ . Dann kann jeder Vektor  $v \in V$  **eindeutig** in der Form

$$v = \sum_{i=1}^n x_i b_i$$

dargestellt werden.

Die  $n$  Skalare  $x_i \in \mathbb{K}$  heissen **Koordinaten** oder **Komponenten** des Vektors  $v$  **bezüglich der Basis**  $\{b_1, \dots, b_n\}$ . Der Vektor  $v \in V$  kann also eindeutig als Koordinatenvektor  $x \in \mathbb{K}^n$  in der Notation eines Spaltenvektors angegeben werden. Es besteht eine eindeutige Beziehung zwischen  $v \in V$  und

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

#### Bemerkung:

Die Darstellung eines Vektors  $v$  als Koordinatenvektor hängt von der Wahl der Basis und der Reihenfolge der Basisvektoren ab.

#### Beispiel:

Wir betrachten in  $P_2$  das Polynom

$$p(x) = 6 - 2x - 2x^2.$$

und wählen die Basis  $\{p_1, p_2, p_3\}$ , wobei

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2.$$

Diese Polynom ist als Linearkombination in dieser Basis gegeben durch

$$p(x) = 6p_1(x) - 2p_2(x) - 2p_3(x).$$

Damit kann dieses Polynom als Koordinatenvektor im  $\mathbb{R}^3$  verstanden werden, also

$$\tilde{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Man beachte, dass die Schreibweise als Koordinatenvektor von der Wahl der Basis abhängt. Wählen wir z.B. die Basis  $\{q_1, q_2, q_3\}$  mit

$$q_1(x) = 3, \quad q_2(x) = x^2, \quad q_3(x) = -2x.$$

Dann gilt:

$$p(x) = 2q_1(x) - 2q_2(x) + 1q_3(x).$$

Bezüglich der Basis  $\{q_1, q_2, q_3\}$  schreiben wir also den Koordinatenvektor

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

## 5.5 Unendlich-dimensionale Vektorräume

In diesem Abschnitt wollen wir uns noch ganz kurz mit unendlich-dimensionalen Vektorräumen beschäftigen. Unendlich-dimensionale Vektorräume sind vor allem Vektorräume, die aus Funktionen bestehen. Es folgen einige Beispiele:

### Beispiele:

- 1) Die Menge der Polynome  $\mathbb{R}[x]$  ist ein unendlich-dimensionaler Vektorraum.
- 2) Die Menge aller reellen glatten (d.h. unendlich oft differenzierbaren) Funktionen  $C^\infty(\mathbb{R})$  ist ebenfalls ein unendlich-dimensionaler Vektorraum. Da Polynome unendlich oft differenzierbar sind, ist als  $\mathbb{R}[x]$  ein Unterraum von  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Das heisst, obwohl der Vektorraum  $C^\infty(\mathbb{R})$  gewissermassen viel grösser als  $\mathbb{R}[x]$  sind beide Räume unendlichdimensional.
- 3) Die unendlich oft differenzierbaren Funktionen sind natürlich eine Teilmenge der Menge  $C^1(\mathbb{R})$  der stetig differenzierbaren Funktionen, welche wiederum eine Teilmenge der Menge  $C(\mathbb{R})$  der stetigen Funktionen ist. Wir haben also eine ganze Schar von unendlich-dimensionalen Vektorräumen, die aus Funktionen bestehen, nämlich

$$\mathbb{R}[x] \subset C^\infty(\mathbb{R}) \subset C^1(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R}).$$

Wie steht es nun mit Basen von unendlich-dimensionalen Vektorräumen. Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass endlich-dimensionale Vektorräume immer eine Basis haben. Erstaunlicherweise gilt das sogar für alle Vektorräume:

### Satz 5.5.1

Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.

Im letzten Abschnitt haben wir diesen Satz für den endlich-dimensionalen Fall bewiesen. Den Satz auch im allgemeinen Fall zu beweisen, würde den Rahmen dieser Vorlesung aber sprengen. Wir wollen aber trotzdem einen äusserst interessanten, aber etwas philosophischen Aspekt zum Beweis dieses Satzes ansprechen. Für dessen Beweis muss man nämlich das sogenannte **Auswahlaxiom**<sup>3</sup> oder eine dazu äquivalente Aussage wie z.B. das **Zornsche Lemma** benutzen. Das Interessante am Auswahlaxiom ist nicht so sehr seine Aussage, sondern dass es zu denjenigen Aussagen in der Mathematik gehört, die man weder beweisen noch widerlegen kann. Ja, ja, solche Aussagen gibt es in der Mathematik! Der österreichische Mathematiker Kurt Gödel (1906-1978) hat gezeigt, dass egal auf welchen Axiomen man die Mathematik aufbaut (mit etwas muss man ja anfangen), man immer entweder einen logischen Widerspruch bekommt (das darf natürlich nicht sein) oder man halt Aussagen wie das Auswahlaxiom im System hat, von denen man einfach annehmen muss, dass sie wahr oder falsch sind (Unvollständigkeit). Beim Auswahlaxiom nimmt man in der Mathematik also einfach an, dass es stimmt und benutzt es zum Beispiel im Beweis von Satz 5.5.1. Würde man stattdessen

<sup>3</sup>Das Auswahlaxiom besagt, dass für eine gegebene Menge von Mengen immer eine Funktion existiert, die es erlaubt aus jeder der Mengen jeweils ein Element auszuwählen. Eine solche Funktion heisst Auswahlfunktion. Wichtig ist die Tatsache, dass die Mengen auch unendlich viele Elemente haben dürfen.

annehmen, dass das Auswahlaxiom falsch ist, dann trifft Satz 5.5.1 (und viele andere Eigenschaften, die das Auswahlaxiom benutzen) nicht zu! Man bekommt dann eine ganz andere Mathematik, die auf einem etwas anderen Fundament aufgebaut ist, aber genauso logisch geschlossen und widerspruchsfrei ist. Jetzt könnte man verzweifelt fragen: warum ist dann “unsere” Mathematik *mit* dem Auswahlaxiom die Richtige und nicht diejenige ohne das Auswahlaxiom? Die Antwort darauf ist so einfach wie schockierend: beide sind eben richtig. Beruhigend ist, dass für die meisten konkrete Probleme in der Praxis – in den Ingenieur- und Naturwissenschaften – das Auswahlaxiom kaum benutzt werden muss.<sup>4</sup> Damit ist es also in der Praxis meistens irrelevant mit welchem Fundament man beginnt.

Satz 5.5.1 ist ein gutes Beispiel, denn er spielt in der Praxis kaum eine Rolle, wie wir gleich erläutern werden. Der Satz ist zwar eine sehr starke Aussage. Sie bedeutet, dass man auch für einen unendlichdimensionalen Vektorraum eine (zwar unendliche) Teilmenge  $B$  finden könnte, sodass man jedes  $v \in V$  als Linearkombination

$$v = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{K}, \quad v_k \in B \quad \forall k$$

schreiben kann, also als Linearkombination von *endlich vielen* (sic!) Vektoren  $v_k$  aus der Basis  $B$ . Leider lässt sich in konkreten Beispielen von unendlichdimensionalen Vektorräumen fast nie eine solche Basis finden, obwohl man weiss, dass es sie geben muss. So etwas passiert ab und zu in der Mathematik: zeigen, dass es etwas existiert und dieses entsprechend dann auch zu finden, sind häufig zwei verschiedene Paar Stiefel.

### Beispiele:

- 1) Der Vektorraum der reellen Polynome  $\mathbb{R}[x]$  hat die Menge  $\{1, x, x^2, x^3, \dots\}$  als Basis. Man sieht, dass die Basis unendlich viele Elemente enthält. Aber natürlich lässt sich jedes Polynom in der Form

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

schreiben.

- 2) Wenn wir eine Basis des Vektorraums  $C([0, 2\pi])$  der stetigen Funktionen auf  $[0, 2\pi]$  finden wollen, müssen wir bereits kapitulieren. Zum Beispiel ist die Menge der Funktionen  $\{\cos(mt), \sin(nt)\}$ ,  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  zwar linear unabhängig. Sie ist aber kein Erzeugendensystem. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass man aber diese Menge trotzdem irgendwie als “Basis” benutzen kann. Das heisst, man erweitert den Begriff einer Basis ein bisschen, indem man unendliche Linearkombinationen zulässt.

## 5.6 Vektorräume mit Skalarprodukt

Im Abschnitt 2.2 haben wir die euklidische Norm und das euklidische (oder kanonische) Skalarprodukt auf den Vektorräumen  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  kennengelernt. Die euklidische Norm liefert uns die Länge von Vektoren und mit ihrer Hilfe kann man auch den Abstand von zwei Punkten bzw. (Orts-)vektoren ausrechnen. Aus dem Skalarprodukt dagegen kann man ableiten, was man unter einem “rechten Winkel” versteht, bzw. was *orthogonale* Vektoren sind. Das Skalarprodukt führte uns dann zur Orthogonalprojektion und die Orthogonalprojektion lieferte uns eine Formel für den Winkel zwischen Vektoren. Norm und Skalarprodukt verleihen also den Vektorräumen  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  eine elementare geometrische Struktur (Länge, Abstände und Winkel). Diese geometrische Struktur möchten wir gerne auch auf allgemeineren Vektorräumen haben. Mit dieser Verallgemeinerung bekommen auch diese Vektorräume eine geometrische Struktur, die es uns erlaubt von Orthogonalität und Längen von Vektoren, sowie von Abständen und Winkeln zwischen Vektoren zu sprechen.

### 5.6.1 Normen auf Vektorräumen

Wir starten mit der Definition einer Norm:

#### Definition 5.6.1 (Norm)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Eine **Norm** ist eine Abbildung von  $V$  auf die nicht negativen reellen Zahlen,

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow [0, \infty[$$

welche die folgenden Eigenschaften besitzt:

<sup>4</sup>Seit einigen Jahren kennt man allerdings auch konkrete Beispiele, bei denen das Resultat von der Gültigkeit des Auswahlaxioms abhängt. Das heisst so ganz ohne, ist dieses Problem nicht.

i)  $\|\cdot\|$  ist **absolut homogen**:

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \forall v \in V, \lambda \in \mathbb{K}.$$

ii)  $\|\cdot\|$  ist **subadditiv** (Dreiecksungleichung):

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|, \quad \forall v, w \in V$$

iii)  $\|\cdot\|$  ist **definit**:

$$\|v\| = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0.$$

Ein Vektorraum  $V$ , der mit einer Norm versehen wurde, heisst **normierter Vektorraum**.

### Bemerkungen:

i) Eine Norm induziert automatisch eine sogenannte **Metrik**. Wenn man nämlich zwei Vektoren  $v, w \in V$  hat, dann definiert

$$d(v, w) := \|v - w\|$$

den Abstand zwischen  $v$  und  $w$ . Mit einer Norm kann man also den Vektorraum "vermessen". Das ist genau das gleiche Prinzip wie wenn man den Abstand von zwei Punkten im  $\mathbb{R}^3$  ausrechnet. Man nimmt die Differenz der beiden Ortsvektoren (den Verbindungsvektor) und berechnet dessen Norm.

ii) Solange man auf einem Vektorraum  $V$  keine Norm hat, gibt es auch keine Grenzwerte von Folgen und auch keine Reihen. Denn wenn man eine Folge  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in einem Vektorraum hat, dann hat sie einen Grenzwert  $v \in V$ , also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v,$$

falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \|v - v_k\| < \varepsilon \quad \forall k > n.$$

Das nennt man dann eine konvergente Folge. Die Definition eines Grenzwertes benötigt also eine Norm, denn die Folge soll sich ja wenn  $n \rightarrow \infty$  dem Grenzwert annähern. Der Abstand zum Grenzwert soll immer kleiner werden. Das funktioniert aber nur, wenn man einen Abstand überhaupt ausrechnen kann. Dazu braucht man die Norm.

iii) Besitzt ein normierter Vektorraum  $V$  noch zusätzlich die Eigenschaft der **Vollständigkeit**, d.h. für jede konvergente Folge in  $V$  ist auch deren Grenzwert in  $V$ , nennt man  $V$  einen **Banachraum**. Da endlichdimensionale normierte Vektorräume automatisch vollständig sind, sind sie alle **Banachräume**. Die Theorie über (vor allem unendlichdimensionale) Banachräume füllt ganze Bücher und man kann ganze Vorlesungen nur über diese Banachräume abhalten.

### Beispiele:

1) Euklidische Norm. Auf den Räumen  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  kennen wir bereits die Norm (siehe Abschnitt 2.2)

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$
$$\|z\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \bar{z}_i z_i}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Diese Norm entspricht dem, was wir unter der natürlichen Länge von Vektoren verstehen und ist deshalb die am meisten verbreitete Norm. Zur Unterscheidung von weiteren Normen, die wir gleich kennenlernen werden, haben wir der euklidischen Norm ein Index 2 verpasst. Ebenso gut könnten wir nämlich weitere Normen auf  $\mathbb{K}^n$  einführen, zum Beispiel:

2)  $p$ -Normen. Für eine natürliche Zahl  $1 \leq p < \infty$  definiert man die Normen

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

auf dem  $\mathbb{K}^n$ . Jetzt wird auch die Schreibweise  $\|\cdot\|_2$  für die euklidische Norm klar. Es handelt sich nämlich um die Norm mit  $p = 2$ . Oops, das heisst, wir kennen allein auf  $\mathbb{K}^n$  nun schon unendlich viele verschiedene Normen! Eine weitere mögliche Norm auf  $\mathbb{K}^n$  ist auch noch die

3) Maximumnorm:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Diese Norm entspricht also einfach dem Betrags mässig grössten Eintrag im Vektor.

4) Auch auf dem Vektorraum der Matrizen  $\mathbb{K}^{m \times n}$  kann man Normen definieren. Eine mögliche Norm, die der euklidischen Norm für Vektoren entspricht ist die sogenannte **Frobenius-Norm**

Die Normen aus den obigen Beispielen lassen sich ganz simpel auch auf den Vektorraum  $\mathbb{K}^{m \times n}$  der Matrizen übertragen. Für  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  definieren

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

Weitere verwendete Normen sind die

$$\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

die **Zeilensummennorm**, bei welcher man die Summe über alle Zeilen bildet und dann den betragsmässig grössten dieser Werte bestimmt und analog dazu die **Spaltensummennorm**

$$\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

Es gibt noch weitere Normen auf  $\mathbb{K}^{m \times n}$  wie zum Beispiel die **Spektralnorm**  $\|A\|_2$ , auf die wir aber hier nicht weiter eingehen möchten.

5) Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heisst beschränkt, wenn es eine reelle Zahl  $M > 0$  gibt, sodass  $|f(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Sei nun

$$C^b(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt} \right\}$$

die Menge der stetigen und beschränkten Funktionen. Auf dieser Menge definiert

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

eine Norm. Unter dem sogenannten **Supremum**  $\sup$  versteht man die kleinste der oberen Schranken  $M$ . Diese Norm auf  $C^b(\mathbb{R})$  heisst **Supremumsnorm**. Es gilt beispielsweise  $\|\sin\|_\infty = 1$  und  $\|\arctan\|_\infty = \pi$ . Ist der Definitionsbereich einer stetigen Funktion ein abgeschlossenes Intervall  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , dann ist die Funktion automatisch beschränkt. Die Supremumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  definiert also auch auf dem Vektorraum

$$C([a, b]) := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \right\}$$

der stetigen Funktionen auf  $[a, b]$  eine Norm.

6) Für ein  $p \in \mathbb{N}$  betrachten wir die Menge der sogenannten  $p$ -integrierbaren Funktionen

$$L^p(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

Wir definieren hier nicht genau, was messbare Funktionen sind; die Messbarkeit ist erforderlich, damit das Integral definiert ist. Es handelt sich hier aber um das Lebesgue-Integral und nicht um das herkömmliche Riemann-Integral. Doch das soll uns hier nicht weiter beschäftigen. Wichtig ist: bei  $L^p(\mathbb{R})$  handelt es sich um einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum und durch

$$\|f\|_{L^p} := \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

wird auf  $L^p(\mathbb{R})$  eine Norm definiert.

Soviel zu Normen und normierten Vektorräumen.

## 5.6.2 Skalarprodukte auf Vektorräumen

Kommen wir zum Skalarprodukt. Bei der Definition des Skalarprodukts müssen wir zwischen reellen und komplexen Vektorräumen unterscheiden.

### Definition 5.6.2 (Skalarprodukt)

Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen:

Ein **Skalarprodukt** auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

i)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist **bilinear**, d.h.

$$\begin{aligned} \bullet \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle &= \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle \quad \forall v_1, v_2, w \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \bullet \langle v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle &= \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, w_2 \rangle \quad \forall v, w_1, w_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

ii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist **symmetrisch**, d.h.

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in V$$

iii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist **positiv definit**, d.h.

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &\geq 0, \quad \forall v \in V, \\ \langle v, v \rangle &= 0, \quad \Leftrightarrow \quad v = 0. \end{aligned}$$

Ein **Skalarprodukt** auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  ist also eine positiv-definite, symmetrische Bilinearform. Einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet man als einen **euklidischen** Vektorraum.

Skalarprodukt auf  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen:

Ein **Skalarprodukt** auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

welche die folgenden Eigenschaften erfüllt:

i)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist **sesquilinear**<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \bullet \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle &= \overline{\lambda_1} \langle v_1, w \rangle + \overline{\lambda_2} \langle v_2, w \rangle \quad \forall v, w_1, w_2 \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \\ \bullet \langle v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle &= \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, w_2 \rangle, \quad \forall v_1, v_2, w \in V, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist linear in der ersten Komponente und semilinear (d.h. linear bis auf komplexe Konjugation) in der zweiten Komponente, daher sesquilinear.

ii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist **hermitesch**, d.h.

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \quad \forall v, w \in V$$

iii)  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist **positiv definit**, d.h.

$$\begin{aligned} \langle v, v \rangle &\geq 0, \quad \forall v \in V, \\ \langle v, v \rangle &= 0, \quad \Leftrightarrow \quad v = 0. \end{aligned}$$

Ein **Skalarprodukt** auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  ist also eine positiv-definite, hermitesche Sesquilinearform. Ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum versehen mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  heisst **unitärer** Vektorraum.

### Bemerkung:

Wenn ein Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt noch zusätzlich vollständig ist (also jede konvergente Folge in  $V$  hat einen Grenzwert in  $V$ ), nennt man  $V$  einen **Hilbertraum**. Endlich-dimensionale Vektorräume mit Skalarprodukt sind automatisch vollständig, und daher alles **Hilberträume**. Hilberträume sind enorm wichtig in der Quantenmechanik.

---

<sup>5</sup>lateinisch: *sesqui*=anderthalb

### Beispiele:

- 1) Das Paradebeispiel, welches als Modell für die obigen Definition diene, ist das Standardskalarprodukt auf dem  $\mathbb{R}^n$  bzw. auf dem  $\mathbb{C}^n$ :

$$\langle x, y \rangle \equiv x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$$
$$\langle w, z \rangle \equiv w \cdot z := \sum_{i=1}^n \overline{w_i} z_i \quad w, z \in \mathbb{C}^n.$$

Das kennen wir schon. Beachten Sie, dass das Standardskalarprodukt und die Standardnorm zusammengehören und über die Formel

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

miteinander verknüpft sind. Mehr dazu weiter unten.

- 2) Die Menge der Matrizen  $\mathbb{K}^{m \times n}$ , egal ob reell oder komplex, ist ja auch ein Vektorraum (und zwar ein  $m \cdot n$ -dimensionaler). Ein Skalarprodukt auf den Matrizen kann man durch

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^T B), \quad A, B \in \mathbb{R}^{m \times n},$$
$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(A^* B), \quad A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}.$$

Ist das wirklich ein Skalarprodukt? Überprüfen wir dies (für den komplexen Fall):

- Wir schauen nur die Semilinearität in der 1. Komponente an:

$$\langle \lambda A, B \rangle = \text{tr}((\lambda A)^* B) = \text{tr}(\overline{\lambda} A^* B) = \overline{\lambda} \text{tr}(A^* B) = \overline{\lambda} \langle A, B \rangle$$

- Die Spur einer Matrix hat die Eigenschaft, dass  $\text{tr}(A) = \overline{\text{tr}(A^*)}$ . Aus dieser Eigenschaft folgt, dass

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^* B) = \overline{\text{tr}((A^* B)^*)} = \overline{\text{tr}(B^* A)} = \overline{\langle B, A \rangle}.$$

- Ist  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ , dann ist  $AA^*$  eine hermitesche  $m \times m$ -Matrix. Es gilt:

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^* A) = \sum_{i=1}^m \|a_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \geq 0.$$

Offensichtlich ist also  $\langle A, A \rangle = \|A\|_F^2$  – auch das Skalarprodukt für Matrizen hat seine zugehörige Norm.

- 3) Auf dem Vektorraum  $P_n$  der Polynome vom Grad  $\leq n$  definiert das Integral

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$$

ein Skalarprodukt.

- 4) Auf dem Vektorraum  $L^2(\mathbb{R})$  der quadratintegrierbaren Funktionen auf  $\mathbb{R}$  ist ein Skalarprodukt definiert durch das Integral

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)dx, \quad f(x), g(x) \in L^2(\mathbb{R}).$$

Der Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}^3)$  der quadratintegrierbaren Funktionen spielt eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik. Ein Elektron (z.B. im Wasserstoffatom) wird nämlich quantenmechanisch durch eine Wellenfunktion  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $x \in \mathbb{R}^3$ , beschrieben und zwar eine Funktion mit Norm  $\|\psi\|_{L^2} = 1$ . Unter  $|\psi(x_1, x_2, x_3)|^2$  versteht man die Wahrscheinlichkeitsdichte, dass sich das Elektron am Ort  $(x_1|x_2|x_3)$  befindet. Deshalb muss auch die Norm 1 sein, da die Wahrscheinlichkeit insgesamt 1 ergeben muss. Das Elektron muss ja irgendwo im  $\mathbb{R}^3$  sein.

### Satz 5.6.3 (Induzierte Norm)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , also entweder ein euklidischer oder ein unitärer Vektorraum. Dann ist die Abbildung

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$v \longmapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$$

eine Norm auf  $V$ . Ein Skalarprodukt induziert also immer eine zugehörige Norm auf  $V$  und macht damit  $V$  zu einem normierten Vektorraum.

**Bemerkung:**

Ein Skalarprodukt ist also eine tiefere algebraische Struktur auf einem Vektorraum als eine Norm. Denn wenn man ein Skalarprodukt hat man automatisch auch eine Norm, aber nicht umgekehrt. Mit einer Norm lassen sich Vektoren messen (Länge) und damit Grenzwerte definieren, mit einem Skalarprodukt kann man aber sogar Winkel ausrechnen. Mehr dazu im nächsten Abschnitt.

**Beispiele:**

- 1) Für den Vektorraum  $\mathbb{K}^n$  haben wir den Zusammenhang zwischen Standardnorm und Standardskalarprodukt bereits im Abschnitt 2.2.2 festgestellt.
- 2) Für den Vektorraum der Matrizen  $\mathbb{K}^{m \times n}$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^* B)$$

ist die zugehörige Norm die Matrixnorm

$$\|A\|_F = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}.$$

- 3) Für den Raum  $L^2(\mathbb{R})$  ist die vom Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx$$

induzierte Norm die  $L^2$ -Norm

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx}$$

**Satz 5.6.4 (Cauchy-Schwarz Ungleichung)**

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und  $\|\cdot\|$  die vom Skalarprodukt induzierte Norm. Dann gilt:

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\|, \quad \forall v, w \in V$$

*Beweis.* Wenn  $w = 0$ , dann ist die Cauchy-Schwarz Ungleichung automatisch erfüllt. Wir dürfen also annehmen, dass  $w \neq 0$ . Für ein beliebiges  $\lambda \in \mathbb{K}$  berechnen wir:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v - \lambda w\|^2 = \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle = \langle v, v \rangle - \langle v, \lambda w \rangle - \langle \lambda w, v \rangle + \langle \lambda w, \lambda w \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \lambda \langle v, w \rangle - \overline{\lambda} \langle w, v \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle w, w \rangle \\ &= \|v\|^2 - \lambda \langle v, w \rangle - \overline{\lambda} \langle w, v \rangle + |\lambda|^2 \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 - \lambda \langle v, w \rangle - \overline{\lambda} \overline{\langle v, w \rangle} + |\lambda|^2 \|w\|^2. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$\lambda := \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} = \frac{\overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2}, \quad \overline{\lambda} = \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2}, \quad |\lambda|^2 = \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^4}$$

in die Ungleichung ein:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|v\|^2 - \lambda \langle v, w \rangle - \overline{\lambda} \overline{\langle v, w \rangle} + |\lambda|^2 \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \langle v, w \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \overline{\langle v, w \rangle} + \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^4} \|w\|^4 \\ &= \|v\|^2 - \frac{\langle v, w \rangle \langle v, w \rangle}{\|w\|^2} - \frac{\langle v, w \rangle \overline{\langle v, w \rangle}}{\|w\|^2} + \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} \\ &= \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} + \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2} \\ &= \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2}. \end{aligned}$$

Jetzt haben wir also die Ungleichung

$$0 \leq \|v\|^2 - \frac{|\langle v, w \rangle|^2}{\|w\|^2}$$

gefunden. Durch Multiplikation mit  $\|w\|^2$  findet man daraus

$$0 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 - |\langle v, w \rangle|^2$$

und daraus wiederum durch Ziehung der Wurzel die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|. \quad \square$$

### Definition 5.6.5 (Öffnungswinkel)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Es handelt sich also um einen **euklidischen** Vektorraum. Wir definieren den Winkel zwischen zwei Vektoren  $v \neq 0$  und  $w \neq 0$  durch die Formel

$$\angle(v, w) := \arccos \left( \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|} \right).$$

### Bemerkungen:

- Die Formel für den Winkel zwischen zwei Vektoren ist vollkommen analog zur entsprechenden Formel im  $\mathbb{R}^n$  (Definition 2.2.8).
- Es ist prinzipiell auch möglich, Zwischenwinkel für  $\mathbb{C}$ -Vektorräume zu definieren. Es gibt dann aber mehrere Möglichkeiten, wie man imaginäre Winkel interpretieren könnte. Wir beschränken uns deshalb hier auf die reellen Vektorräume, wo wir – wie gewohnt – immer einen Winkel im Intervall  $[0, \pi[$  erhalten.

### Definition 5.6.6 (Orthogonalprojektion)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und  $v, w \in V$  zwei Vektoren in  $V$ . Die Orthogonalprojektion von  $v$  auf  $w$  ist dann

$$v_w := \frac{\langle w, v \rangle}{\|w\|^2} w.$$

Im nächsten Abschnitt werden wir diese Formel vor allem im Spezialfall  $\|w\| = 1$  benutzen.

## 5.6.3 Orthonormalbasen

Erst wenn auf einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  definiert ist, hat man auf diesem Vektorraum eine geometrische Struktur, d.h. man kann dann von Winkeln, insbesondere von rechten Winkeln sprechen und es ist klar, was darunter zu verstehen ist. Nämlich:

### Definition 5.6.7 (Orthogonale Vektoren)

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt. Zwei Vektoren  $v, w \in V$  heißen **orthogonal** oder **rechtwinklig**, falls ihr Skalarprodukt verschwindet,

$$\langle v, w \rangle = 0.$$

### Bemerkung:

Der Nullvektor ist orthogonal zu einem beliebigen Vektor  $v \in V$ .

Im Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  war und ist uns das völlig geläufig. Wir haben das Standardskalarprodukt und die Standardbasis  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 3}$ , wobei

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Was macht diese Basis so speziell und praktisch? Es ist die Tatsache, dass es eine **orthonormierte** Basis ist, d.h. die Basisvektoren sind **orthogonal** (senkrecht) und **normiert** (Länge 1). Mit dem Skalarprodukt ausgedrückt, gilt also

$$\begin{aligned} \langle e_1, e_2 \rangle &= \langle e_1, e_3 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0, \\ \langle e_1, e_1 \rangle &= \|e_1\|^2 = 1, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = \|e_2\|^2 = 1 \quad \text{und} \quad \langle e_3, e_3 \rangle = \|e_3\|^2 = 1. \end{aligned}$$

Allgemein ist eine orthonormierte Basis wie folgt definiert:

### Definition 5.6.8 (Orthonormalbasis)

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ . Eine Basis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  heisst **Orthonormalbasis**, falls die Basisvektoren paarweise orthogonal zueinander sind und alle Norm 1 haben (Einheitsvektoren), d.h.

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Was ist aber nun genau der Vorteil, einer orthonormierten Basis? Betrachten wir dazu eine beliebigen Vektor  $x \in \mathbb{R}^3$ . Bezüglich der Standardbasis  $\{e_i\}_{1 \leq i \leq 3}$  ist er gegeben durch die Linearkombination

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3,$$

sein Koordinatenvektor ist also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Nun lässt sich sehr leicht feststellen, dass es aufgrund der Orthonormalität der Standardbasis eine einfache Formel für die Koordinaten  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , gibt. Die Koordinaten sind nämlich Orthogonalprojektionen auf die Basisvektoren. Denn es gilt:

$$x_1 = \frac{\langle e_1, x \rangle}{\|e_1\|} = \langle e_1, x \rangle, \quad x_2 = \langle e_2, x \rangle, \quad \text{und} \quad x_3 = \langle e_3, x \rangle$$

Hat man also eine orthonormierte Basis in einem Vektorraum, dann muss man, um die Koordinaten eines Vektors bezüglich dieser Basis zu finden, kein lineares Gleichungssystem lösen, sondern man muss nur die Skalarprodukte des Vektors mit den Basisvektoren ausrechnen.

### 5.6.4 Gram-Schmidt-Verfahren

Wenn also orthonormierte Basen so praktisch sind, wie findet man denn eine solche Basis? Normalerweise hat man ja bei einem bestimmten Vektorraum  $V$  erstmal nur eine beliebige Basis  $\{w_1, \dots, w_n\}$  gegeben. Nun gibt es tatsächlich einen Algorithmus, wie man aus einer beliebigen Basis eine **orthogonale** Basis macht. Dieser Algorithmus heisst **Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt**.

#### Satz 5.6.9 (Gram-Schmidt)

Sei  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ( $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ ) mit Skalarprodukt und einer Basis  $\{w_1, \dots, w_n\}$ . Dann existieren Vektoren  $v_1, \dots, v_n$ , sodass

- i)  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ist eine orthogonale Basis von  $V$ .
- ii)  $v_1 = w_1$  und  $v_i = w_i +$  Linearkombination von  $w_1, \dots, w_{i-1}$  für  $i > 1$ .

Für die Berechnung der orthogonalen Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  kann die rekursive Formel

$$v_i = w_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\langle v_k, w_i \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k \tag{5.1}$$

verwendet werden. Das durch die Formel (5.1) erhaltene Verfahren für die Orthogonalisierung einer Basis nennt man das **Gram-Schmidt-Verfahren**.

Auf einem Vektorraum mit Skalarprodukt nehme man also eine beliebige Basis  $\{w_1, \dots, w_n\}$ , führe das Gram-Schmidt-Verfahren durch und schon hat man eine orthogonale Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Aus der orthogonalen Basis kann man dann noch leicht eine orthonormierte Basis basteln, indem man die Basisvektoren, die einem das Gram-Schmidt-Verfahren ausspuckt noch normiert (auf Länge 1 bringt), durch

$$e_i = \frac{v_i}{\|v_i\|}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann ist  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine orthonormierte Basis.

**Korollar 5.6.10**

Jeder endlich-dimensionale  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  mit einem Skalarprodukt besitzt eine orthonormierte Basis  $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ . Bezüglich dieser Basis ist ein beliebiger Vektor  $v \in V$  gegeben durch

$$v = \sum_{i=1}^n \langle e_i, v \rangle e_i,$$

d.h.  $\langle e_i, v \rangle$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sind die Koordinaten von  $v$  bezüglich der orthonormierten Basis  $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ .

*Beweis.* Man beginnt mit einer beliebigen Basis, führt das Gram-Schmidt-Verfahren durch und normiert die erhaltenen Basisvektoren auf Norm 1. Für ein  $v \in V$  ist die Orthogonalprojektion auf den  $i$ -ten Basisvektor gegeben durch

$$v_{e_i} = \frac{\langle e_i, v \rangle}{\|e_i\|^2} e_i = \langle e_i, v \rangle e_i$$

Daher ist  $\langle e_i, v \rangle$  die  $i$ -te Koordinate bezüglich  $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ . □

Wir spielen das Gram-Schmidt-Verfahren an drei Beispielen einmal durch:

**Beispiele:**

i) Wir betrachten die Ebene

$$E := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

durch den Nullpunkt. Diese Ebene ist ein Unterraum des  $\mathbb{R}^3$  und wir statten  $E$  deshalb mit dem Standardskalarprodukt aus. Eine Basis von  $E$  ist z.B. gegeben durch die beiden Vektoren

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Das heisst, wir könnten die Ebene durch die Parameterdarstellung

$$E : r_E = aw_1 + bw_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

beschreiben. Wir wollen nun daraus mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine orthonormierte Basis machen. Für den ersten Vektor bekommen wir einfach

$$v_1 = w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Diesen normieren wir noch auf die Länge eins und bekommen

$$\frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Den zweiten Vektor berechnen wir mit der Formel (5.1):

$$v_2 = w_2 - \frac{v_1 \cdot w_2}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{6}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Normiert auf die Länge eins erhält man

$$\frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist die gesuchte Orthonormalbasis von  $E$  gegeben durch:

$$\{e_1, e_2\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Was ist der Witz daran? Der Punkt  $P(1|1|-5)$  liegt z.B. auf der Ebene. Um seine Koordinaten  $a$  und  $b$  bezüglich der Basis  $\{w_1, w_2\}$  zu berechnen, müssten wir ein lineares Gleichungssystem lösen. Die Koordinaten bezüglich der orthonormierten Basis sind jedoch ganz einfach die beiden Skalarprodukte

$$s = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}} 16 = \frac{8\sqrt{10}}{5},$$

$$t = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{7}{\sqrt{35}} = \frac{\sqrt{35}}{5}.$$

Der Punkt  $P$  hat also bezüglich  $\{e_1, e_2\}$  den Koordinatenvektor

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8\sqrt{10} \\ \sqrt{35} \end{pmatrix},$$

denn in der Tat ist

$$se_1 + te_2 = \frac{8\sqrt{10}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{35}}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

ii) Im  $\mathbb{R}^3$  sei die Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Man finde die zugehörige orthonormierte Basis nach Gram-Schmidt. Der erste Vektor ist

$$v_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der zweite Vektor ist

$$v_2 = b_2 - \frac{\langle v_1, b_2 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Schliesslich ist dann der dritte Vektor noch:

$$v_3 = b_3 - \frac{\langle v_1, b_3 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle v_2, b_3 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{0}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Um die Basis noch zu normieren wählen wir:

$$e_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es ist noch wichtig zu beachten, dass wir aus dem Gram-Schmidt-Verfahren nicht immer eine rechtshändige, orthonormierte Basis bekommen. Stellt man nämlich die drei Basisvektoren in eine Matrix (diese ist automatisch orthogonal, als in  $O(3)$ ), dann erhält man die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$

Also gerade bei diesem Beispiel wird die orthonormierte Basis linkshändig. Das kann man jedoch leicht korrigieren, indem man entweder zwei Vektoren vertauscht, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

wählt, oder einen Basisvektor umlegt, also

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

iii) Sei  $P_n$  der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad  $\leq n$  mit der Basis  $\{1, x, \dots, x^n\}$  und dem Skalarprodukt

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

am Ende Wir begnügen uns damit, mit dem Gram-Schmidt-Verfahren eine orthogonale (und nicht orthonormierte) Basis von  $P_n$  zu finden. Der Anfang ist gemacht, das erste Basispolynom ist

$$p_0(x) = 1.$$

Das nächste Polynom ist

$$p_1(x) = x - \frac{\langle 1, x \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1.$$

Um das auszurechnen, müssen wir all die Skalarprodukte berechnen. Wir starten mit

$$\langle 1, x \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0$$

Hoppla! Die Polynome 1 und  $x$  sind also schon orthogonal und wir bekommen also einfach

$$p_1(x) = x.$$

Weiter ist

$$p_2(x) = x^2 - \frac{\langle p_0(x), x^2 \rangle}{\langle p_0(x), p_0(x) \rangle} p_0(x) - \frac{\langle p_1(x), x^2 \rangle}{\langle p_1(x), p_1(x) \rangle} p_1(x).$$

Die Skalarprodukte, welche wir hier ausrechnen müssen, sind:

$$\begin{aligned} \langle p_0(x), x^2 \rangle &= \langle 1, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}, \\ \langle p_0(x), p_0(x) \rangle &= \langle 1, 1 \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2, \\ \langle p_1(x), x^2 \rangle &= \langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

Diese Integrale eingesetzt liefert uns

$$p_2(x) = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - 0 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Das vierte Polynom ist

$$p_3(x) = x^3 - \frac{\langle p_0, x^3 \rangle}{\langle p_0, p_0 \rangle} p_0 - \frac{\langle p_1, x^3 \rangle}{\langle p_1, p_1 \rangle} p_1 - \frac{\langle p_2, x^3 \rangle}{\langle p_2, p_2 \rangle} p_2.$$

Die Integrale dazu sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\langle p_0(x), x^3 \rangle &= \langle 1, x^3 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^1 = 0, \\ \langle p_1(x), x^3 \rangle &= \langle x, x^3 \rangle = \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{x^5}{5} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{5}, \\ \langle p_1(x), p_1(x) \rangle &= \langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}, \\ \langle p_2(x), x^3 \rangle &= \langle x^2 - \frac{1}{3}, x^3 \rangle = \int_{-1}^1 \left( x^5 - \frac{x^3}{3} \right) dx = \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{12} \Big|_{-1}^1 = 0.\end{aligned}$$

Damit haben wir  $p_3(x)$  zusammengestellt, nämlich

$$p_3(x) = x^3 - 0 - \frac{2/5}{2/3}x - 0 = x^3 - \frac{3}{5}x.$$

Nun werden wir langsam müde und brechen hier ab mit der Gewissheit, dass wir bis zu einem beliebigen  $n$  weitermachen könnten, wenn es denn sein müsste. Wir normieren die Polynome alle noch so, dass  $P_n(1) = 1$ . So erhalten wir schliesslich die ersten paar Polynome

$$\begin{aligned}P_0(x) &= p_0(x) = 1, \\ P_1(x) &= p_1(x) = x, \\ P_2(x) &= \frac{3}{2}p_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ P_3(x) &= \frac{5}{2}p_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x).\end{aligned}$$

Die so normierten, orthogonalen Polynome, die eine Basis des  $P_n$  bilden, sind die berühmten **Légendre-Polynome**. Die ersten fünf Légendre-Polynome sind in der Abbildung 5.1 dargestellt.

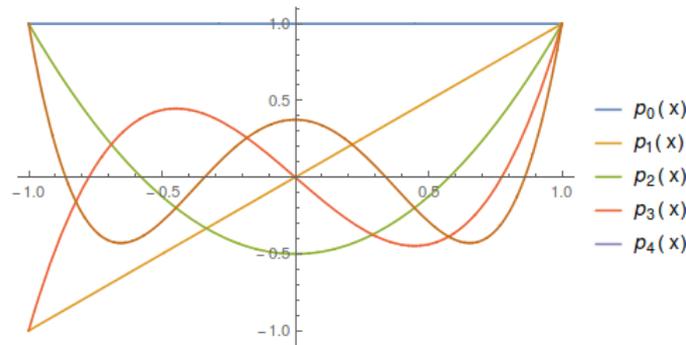


Abbildung 5.1: Die ersten fünf Légendre-Polynome (also bis zur vierten Potenz) im Intervall  $[-1, 1]$ .

Ja, ja. Wir merken es anhand dieser Beispiele schon: für relativ grosse Vektorräume mit vielen Dimensionen wird das Gram-Schmidt-Verfahren mächtig mühsam werden. Aber was will man mehr? Immerhin hat man ja nach all den Strapazen eine orthogonale/orthonormierte Basis in den Händen und das ist schliesslich nicht nichts.

## 5.7 Fourier-Reihen

Ein wichtige Anwendung der komplexen Zahlen ist die sogenannte Fourier-Analyse. Sie basiert auf der mathematischen Tatsache, dass man jede periodische Funktion in eine unendliche Reihe von harmonischen Schwingungen zerlegen kann. Die Fourier-Analyse ist in vielen Wissenschafts- und Technikzweigen von ausserordentlicher praktischer Bedeutung. In der Physik ist die Fourier-Analyse vor allem in der Optik und der Akustik wichtig. Sie spielt aber auch eine bedeutende Rolle in der digitalen Signalverarbeitung und in vielen Gebieten der Mathematik, der Ingenieurwissenschaften und der Wirtschaft.

### 5.7.1 Fourier-Reihe in reeller Schreibweise

Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur reelle Funktion  $f(t)$ , wobei wir uns unter der Variable  $t$  stets eine Zeitdauer vorstellen wollen. Eine solche Funktion  $f(t)$  heisst periodisch mit Periode  $T$ , wenn

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(t + T) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vereinfacht gesagt wiederholt sich die Funktion immer nach einem Intervall der Länge  $T$  wieder. In der Abbildung 5.2 sind vier spezielle Funktionen aus der Menge der periodischen Funktionen dargestellt. Über die Differenzierbarkeit und die Stetigkeit wird nichts verlangt. Periodische Funktionen müssen nicht differenzierbar sein, ja sie dürfen sogar, wie z.B. die Rechteckfunktion oder die Sägezahnfunktion, unstetige Stellen haben. Für periodische Funktionen definieren wir noch die auch aus der Physik bekannten Grössen wie die **Frequenz** der Funktion (Schwingungsfrequenz),

$$\nu := \frac{1}{T}$$

und die sogenannte **Kreisfrequenz**

$$\omega := \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

(wird in  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$  gemessen).

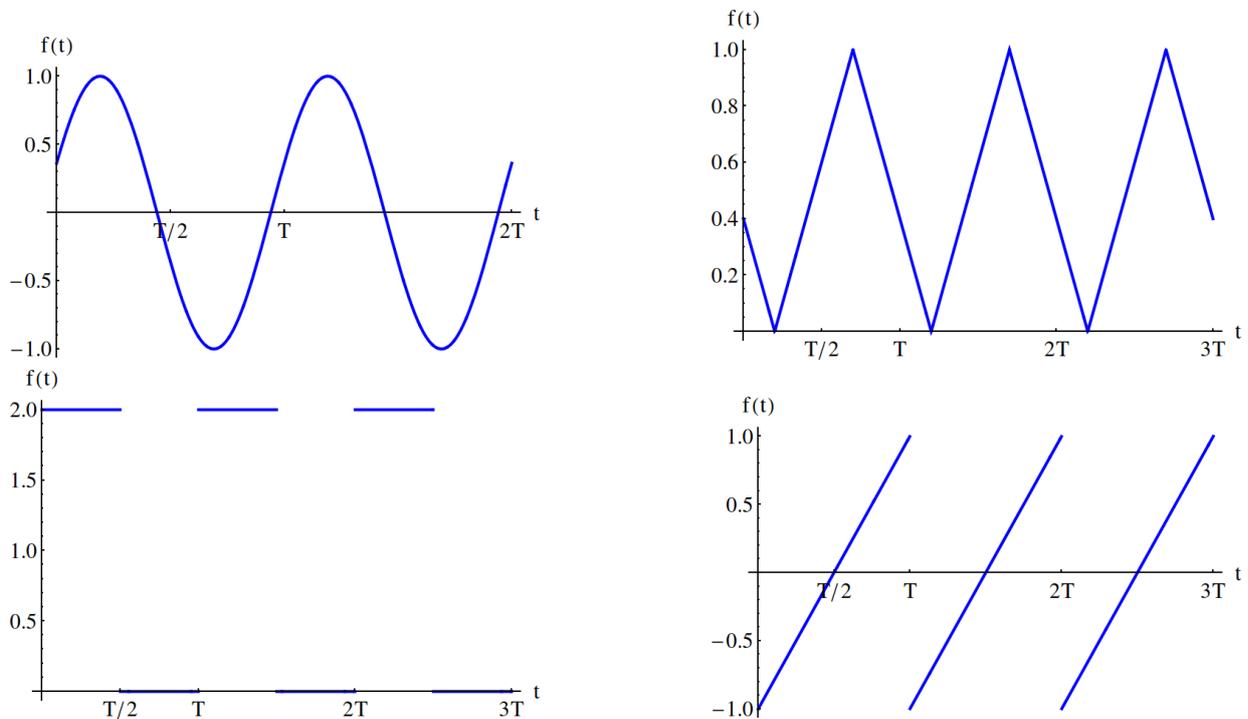


Abbildung 5.2: Beispiele von periodischen Funktionen (mit Periode  $T = 1$ ): (a) Gewöhnliche Sinus-Funktion  $\sin(\omega t - \varphi)$  mit nicht verschwindender Phase, (b) Dreiecksfunktion, (c) Rechteckfunktion, (d) Dreiecksfunktion. Die unteren beiden Funktionen (c) und (d) enthalten Unstetigkeitsstellen.

Die periodischen Funktionen (mit einer festen Periode  $T$ ) bilden an sich schon einen Vektorraum, wie man sich leicht überlegen kann. Es fehlt uns aber auf diesem Vektorraum ein geeignetes Skalarprodukt. Um ein Skalarprodukt zu konstruieren, müssen wir den Vektorraum leicht modifizieren. Anstatt der periodischen Funktionen nehmen wir die Menge aller Funktionen

$$f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(t),$$

mit

$$\int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty \quad (5.2)$$

Das sind alle Funktionen mit Definitionsbereich  $[0, T]$ , für die das Integral in (5.2) nicht unendlich wird. Man kann sich leicht überlegen, dass diese Menge von Funktionen (die man mit  $L^2([0, T])$  bezeichnet) ebenfalls ein Vektorraum ist. Insbesondere gehören auch die meisten periodischen Funktionen (mit Periode  $T$ ) zu dieser Menge  $L^2([0, T])$  (siehe Abb. 5.2), wenn man diese Funktionen von  $[0, T]$  aus einfach periodisch weiterdenkt.  $L^2([0, T])$  wird wegen der Bedingung (5.2) als Vektorraum der **quadratintegrierbaren** Funktionen bezeichnet. Tatsächlich kann man auf  $L^2([0, T])$  auch ein Skalarprodukt definieren, nämlich

$$\langle f(t), g(t) \rangle_{L^2} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)g(t)dt.$$

Jetzt ist auch klar, warum die Bedingung (5.2) erforderlich ist. Wäre sie nicht erfüllt, dann wäre das Skalarprodukt nicht für alle  $f(t)$  im Vektorraum definiert, z.B. könnte dann die Norm

$$\|f(t)\|_{L^2} := \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle_{L^2}}$$

unendlich werden.

Bezüglich des Skalarproduktes (5.7.1) sind die Funktionen

$$\begin{aligned} g_0(t) &:= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ g_n(t) &:= \cos(n\omega t), \quad n \in \mathbb{N}, \\ h_m(t) &:= \sin(m\omega t), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

orthonormiert, d.h. sie sind alle senkrecht aufeinander und normiert, also so etwas Ähnliches wie eine orthonormierte Basis (allerdings mit unendlich vielen Basisvektoren). Strenggenommen bilden sie keine Basis von  $L^2([0, 2\pi])$ , denn sie sind kein Erzeugendensystem<sup>6</sup>. Dennoch kann man diese Funktionen fast so wie eine orthonormierte Basis benutzen, denn man kann zeigen, dass eine beliebige Funktion  $f \in L^2([0, T])$  geschrieben werden kann als **unendliche** Linearkombination der Form (**Fourierreihe**)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)). \quad (5.3)$$

Der  $a_0$ -Term ist eine Verschiebung der Funktion  $f(t)$  nach unten oder oben und hat mit der Schwingung nichts zu tun. Es handelt sich dabei um den **DC-Anteil** der periodischen Funktion.<sup>7</sup>

Die (unendliche) Summe in (5.3) ist nichts anderes als eine Zerlegung von  $f(t)$  in die Grundschwingung (Grundton) mit Frequenz  $\omega$  und die Obertöne mit Frequenzen  $n\omega$ ,  $n \geq 2$ . Die Koordinaten (**Fourierkoeffizienten**) sind gegeben durch die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} a_0 &= \langle 1, f(t) \rangle_{L^2} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)dt, \\ a_n &= \langle g_n(t), f(t) \rangle_{L^2} = \langle \cos(n\omega t), f(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)dt, \quad n \in \mathbb{N} \\ b_m &= \langle h_m(t), f(t) \rangle_{L^2} = \langle \sin(m\omega t), f(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(m\omega t)dt, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Es sind eben unendlich viele Koordinaten  $a_n, b_m$  (in der Praxis hört man bei einem grossen, günstig gewählten  $N$  auf). Es handelt sich dabei um die Amplituden des Grundtons ( $a_1$  und  $b_1$ ) und um der Obertöne ( $a_n, b_m$  für  $n, m > 1$ ). Bei akustischen Signalen ergibt sich ein anderer Klang, je nach dem wie diese Fourierkoeffizienten aussehen. Man beachte noch die Tatsache, dass man für den Koeffizienten  $a_0$  eine Ausnahme macht, eigentlich müsste man ja die Funktion  $g_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$  in der Entwicklung nehmen und nicht den Faktor  $1/2$ . Das ist einfach eine Konvention, sodass es sich bei  $a_0$  um das normale Integral über die Funktion  $f(t)$  handelt, ohne Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

<sup>6</sup>Ein Erzeugendensystem darf zwar aus unendlich vielen Vektoren bestehen, aber es muss jeder Vektor  $v \in V$  aus dem Vektor als Linearkombination von **endlich** vielen Vektoren geschrieben werden können, was hier nicht der Fall ist.

<sup>7</sup>DC steht für direct current und man versteht darunter den Gleichstrom im Gegensatz zum Wechselstrom AC.

### Beispiele:

- i) Wir betrachten als Beispiel die Rechteckfunktion. Wir wollen diese Funktion in eine Fourier-Reihe zerlegen, d.h. die ihre Fourierkoeffizienten berechnen. Die Rechteckfunktion aus Abb. 5.2 (c) ist definiert durch

$$f : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto f(t) := \begin{cases} 2 & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ 0 & \frac{T}{2} < t \leq T. \end{cases}$$

Wir starten mit der Berechnung des konstanten Terms  $a_0$ , den man im übrigen auch erraten könnte. Wir bekommen

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 2 dt = \frac{4}{T} t \Big|_{t=0}^{\frac{T}{2}} = 2.$$

Nicht so überraschend ist der konstante Term von  $f(t)$  also  $\frac{a_0}{2} = 1$ . Dieser wird auch als **DC-Anteil** bezeichnet, da es sich sozusagen, um den Gleichstrom-Anteil von  $f(t)$  handelt. Wenn man nämlich die Rechteckfunktion um 1 nach unten verschiebt, dann bekommt man eine um die  $t$ -Achse zentrierte periodische Funktion. Weiter erhalten wir für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 2 \cdot \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) dt =$$
$$= \frac{4}{T} \frac{T}{2\pi n} \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{t=0}^{\frac{T}{2}} = 0.$$

Das heisst, alle Fourier-Koeffizienten  $a_n = 0$ . Auch das ist nicht so überraschend, denn die hier betrachtete Rechteckfunktion ist ungerade, d.h. es können in ihrer Fourier-Reihe gar keine Cosinus-Funktionen vorkommen, weil diese gerade sind. Durch eine Verschiebung von  $f(t)$  nach links oder rechts, würde sich dies aber ändern. Dann berechnen wir noch für  $m \in \mathbb{N}$

$$b_m = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(m \frac{2\pi}{T} t\right) dt = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} 2 \cdot \sin\left(m \frac{2\pi}{T} t\right) dt =$$
$$= -\frac{4}{T} \frac{T}{2\pi m} \cos\left(m \frac{2\pi}{T} t\right) \Big|_{t=0}^{\frac{T}{2}} =$$
$$= \begin{cases} \frac{4}{m \cdot \pi} & m \text{ ungerade} \\ 0 & m \text{ gerade} \end{cases}.$$

Die Fourier-Reihe von  $f(t)$  ist also gegeben durch

$$f(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \left( \sin(\omega t) + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(5\omega t)}{5} + \frac{\sin(7\omega t)}{7} + \dots \right).$$

- ii) Ein besonders spannendes Beispiel ist das Folgende: wir bestimmen die Fourier-Reihe der Funktion  $f(t) = t^2$  auf dem Intervall  $[-\pi, \pi]$ . Wir betrachten also gewissermassen die Funktion als  $2\pi$ -periodisch

fortgesetzt. Es ist also  $T = 2\pi$  und  $\omega = 1$ . Wir berechnen dann

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{1}{\pi} \left. \frac{t^3}{3} \right|_{t=-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}, \\
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \underbrace{\left. \frac{t^2}{n} \sin(nt) \right|_{t=-\pi}^{\pi}}_0 - \frac{2}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \sin(nt) dt = \\
 &= \frac{2}{n^2\pi} \left. t \cos(nt) \right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) dt = \\
 &= \frac{4}{n^2} (-1)^n - \frac{2}{n^3\pi} \underbrace{\left. \sin(nt) \right|_{t=-\pi}^{\pi}}_0 = \\
 &= \frac{4(-1)^n}{n^2}
 \end{aligned}$$

Um die  $b_m$  müssen wir uns nicht kümmern, denn sie sind alle null, weil  $f(t) = t^2$  eine gerade Funktion ist. Wir finden also die schöne Fourier-Reihe

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nt),$$

welche wir in der Näherung bis  $N = 4$  in Abb. 5.3 graphisch darstellen.

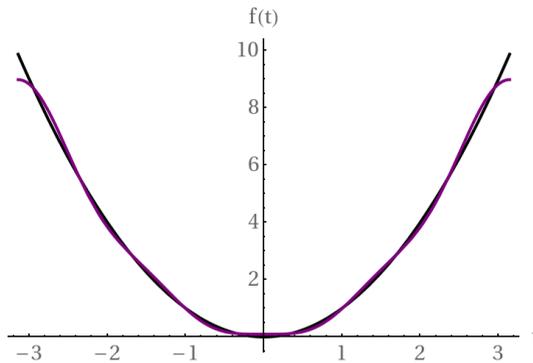


Abbildung 5.3: Fourier-Approximation der Funktion  $f(t) = t^2$  bis zum 4-ten Fourier-Koeffizienten.

Das an sich ist ja schon lässig, wir haben gerade eine Parabel durch Cosinus-Funktionen approximiert. Aber es kommt noch dicker: wenn wir in der Fourier-Reihe  $t = \pi$  setzen, dann erhalten wir

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \underbrace{\cos(n\pi)}_{(-1)^n} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots \right).$$

Wow! Wir können mit dieser Fourier-Reihe ein weltberühmtes Problem lösen, das als **Basler-Problem** in die Geschichte eingegangen ist, nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Das ist krass, oder? Der hier begangene Beweis des Basler-Problems stammt von Augustin-Louis Cauchy, himself.

## 5.7.2 Fourier-Reihe in komplexer Schreibweise

Eine elegantere Schreibweise der Fourier-Reihe ergibt sich, wenn man komplexe Zahlen benutzt, also den Vektorraum  $L^2([0, T])$  als  $\mathbb{C}$ -Vektorraum auffasst, d.h.

$$L^2([0, T]) := \left\{ f : [0, T] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Dieser Vektorraum ist sozusagen die komplexe Verallgemeinerung des Vektorraums der reellen Schreibweise. Daher umfasst er auch Funktionen mit komplexem Funktionswert, welche für die Anwendung in der Praxis aber kaum eine Rolle spielen. Auf diesem Vektorraum definieren wir nun das unitäre Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \frac{1}{T} \int_0^T \overline{f(t)} g(t) dt, \quad (5.4)$$

welches  $L^2([0, T])$  zu einem Hilbertraum macht. Bezüglich dieses Skalarproduktes bilden die Funktionen

$$e_k(t) := e^{ik\omega t}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

ein vollständiges Orthonormalsystem. Da wir damit wiederum einen Vektorraum mit Skalarprodukt und vollständigem Orthonormalsystem zur Verfügung haben, kann man nun wieder der gleichen Logik folgen, wie vorher für die reelle Schreibweise. Jede Funktion  $f(t) \in L^2([0, T])$  kann als unendliche Linearkombination (also als Reihe) in den Basisvektoren geschrieben werden, also

$$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e_k(t), f(t) \rangle_{L^2} e_k(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega t}.$$

Dabei können die (jetzt komplexen) Fourier-Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$  bezüglich der Basis  $e_k(t)$  mit dem Integral

$$c_k = \langle e_k(t), f(t) \rangle_{L^2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (5.5)$$

berechnet werden.

#### Bemerkungen:

- Das Minuszeichen im Exponenten im Integral (5.5) kommt daher, dass man beim Skalarprodukt (5.4) eine komplexe Konjugation auf dem ersten Faktor im Integral hat.
- Man beachte, dass es sich bei den Funktionen

$$e_k(t) = e^{ik\omega t}$$

um (komplexe) harmonische Schwingungen handelt, da sie – wie die Cosinus- und Sinusfunktionen der reellen Schreibweise – die Schwingungsgleichung

$$e_k(t)'' + \omega^2 e_k(t) = 0$$

erfüllen.

- Wir wollen hier nicht im Detail auf die Berechnung der Fourier-Integrale für die  $c_k \in \mathbb{C}$  eingehen. Nur soviel sei gesagt, man integriert ein Integral mit komplexem Integranden genau gleich wie ein normales Integral.

Die Entwicklung von periodischen Funktionen in die Fourier-Reihe

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

ist deshalb so nützlich, weil die Reihe die Funktion  $f(t)$  schon nach wenigen Gliedern genügend gut approximiert. Das heisst in der Praxis kann man die Reihe bei einem je nach der erforderlichen Genauigkeit gewählten  $N \in \mathbb{N}$  “abhacken”:

$$f(t) \approx f_N(t) := \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t}.$$

Um das besser zu verstehen, analysieren wir einige Beispiele, u.a. auch die Funktionen der Abbildung 5.2.

#### Beispiele:

i) Wir betrachten als erstes Beispiel die Funktion

$$f(t) = 1 + \cos(\omega t).$$

Dies ist eine um 1 verschobene Cosinus-Funktion mit der Periodendauer  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Mit Hilfe der Eulerschen Formeln finden wir daraus die zugehörige Fourier-Reihe, ohne die Integrale für die Fourier-Koeffizienten berechnen zu müssen:

$$f(t) = 1 + \cos(\omega t) = 1 + \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) = 1 + \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_{-1}} e^{-i\omega t} + \underbrace{1}_{c_0} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{c_1} e^{i\omega t}$$

Die Fourier-Koeffizienten sind also

$$c_{-1} = \frac{1}{2}, \quad c_0 = 1, \quad c_1 = \overline{c_{-1}} = \frac{1}{2}, \quad c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

Für diese Funktion genügen also drei nicht verschwindende Fourier-Koeffizienten, um die Funktion zu beschreiben. Das ist auch nicht überraschend, denn eine normale Cosinus-Funktion enthält nur eine Schwingung mit der Grundfrequenz und keine Oberfrequenzen. Der Fourier-Koeffizient  $c_0$  ist bloss eine additive Konstante.

ii) Als zweites Beispiel analysieren wir eine um eine Phase  $\varphi$  verschobene Sinus-Funktion mit Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ,

$$f(t) = \sin(\omega t - \varphi).$$

Auch hier braucht man die Fourier-Koeffizienten nicht über die Integrale auszurechnen, sondern benutzt die Eulerschen Formeln:

$$\begin{aligned} f(t) = \sin(\omega t - \varphi) &= \operatorname{Im}(e^{i(\omega t - \varphi)}) = \frac{e^{i(\omega t - \varphi)} - e^{-i(\omega t - \varphi)}}{2i} = \frac{e^{i\omega t} e^{-i\varphi} - e^{-i\omega t} e^{i\varphi}}{2i} = \\ &= -\frac{e^{i\varphi}}{2i} e^{-i\omega t} + \frac{e^{-i\varphi}}{2i} e^{i\omega t} = \frac{ie^{i\varphi}}{2} e^{-i\omega t} - \frac{ie^{-i\varphi}}{2} e^{i\omega t} = \\ &= \frac{i}{2} (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) e^{-i\omega t} - \frac{i}{2} (\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) e^{i\omega t} = \\ &= \underbrace{\left(-\frac{\sin(\varphi)}{2} + \frac{\cos(\varphi)}{2} i\right)}_{c_{-1}} e^{-i\omega t} + \underbrace{0}_{c_0} + \underbrace{\left(-\frac{\sin(\varphi)}{2} - \frac{\cos(\varphi)}{2} i\right)}_{c_1} e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Die Fourier-Koeffizienten sind

$$c_{-1} = \left(-\frac{\sin(\varphi)}{2} + \frac{\cos(\varphi)}{2} i\right), \quad c_0 = 0, \quad c_1 = \overline{c_{-1}} = \left(-\frac{\sin(\varphi)}{2} - \frac{\cos(\varphi)}{2} i\right), \quad c_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

Auch in diesem Beispiel sind die Fourier-Koeffizienten  $c_1$  und  $c_{-1}$  ausreichend.

iii) Als drittes Beispiel nehmen wir die Sägezahnfunktion aus Abb. 5.2 (d). Diese Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f : [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto f(t) := \frac{2}{T} t - 1 \end{aligned}$$

Wir berechnen zuerst

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{2}{T} t - 1\right) dt = 0.$$

Das hätten wir so erwarten können, denn diese Funktion besitzt keinen konstanten Anteil. Weiter berechnen wir für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{2t}{T} e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt - \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt = \\ &= \frac{2}{T^2} \int_0^T t e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt - \frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik \frac{2\pi}{T} t} dt. \end{aligned}$$

Das zweite Integral ist

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} dt = \frac{i}{2\pi k} e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} \Big|_{t=0}^T = 0.$$

Das erste Integral finden wir mit Hilfe der partiellen Integration

$$\begin{aligned} \frac{2}{T^2} \int_0^T t e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} dt &= \frac{2t}{T^2} \left( -\frac{T}{2\pi ki} \right) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} \Big|_{t=0}^T - \frac{2}{T^2} \int_0^T \left( -\frac{T}{2\pi ki} \right) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} dt = \\ &= \frac{i}{\pi k} - \frac{i}{T\pi k} \underbrace{\int_0^T e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} dt}_0 = \frac{i}{\pi k} \end{aligned}$$

Somit sind die Fourier-Koeffizienten der Sägezahn-Funktion

$$c_k = \frac{i}{k \cdot \pi}$$

und damit die Fourier-Reihe der Sägezahnfunktion aus Abb. 5.2 (d):

$$\frac{2t}{T} - 1 = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{i}{k} e^{ik\omega t}$$

In Abb. 5.4 sind verschiedene Fourier-Approximationen dargestellt. Es wird deutlich, dass die approximierten Funktionen bei grösserem Wert für  $N$  die Sägezahnfunktion immer besser reproduzieren.

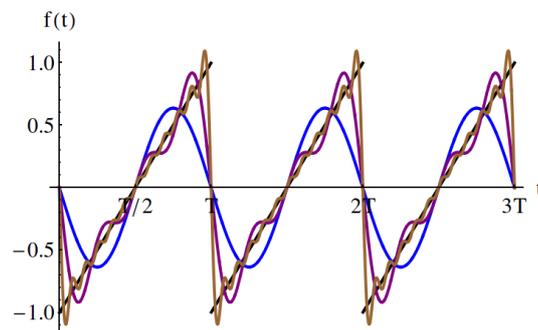


Abbildung 5.4: Verschiedene Fourier-Approximationen der Sägezahnfunktion. Dargestellt sind neben der Sägezahnfunktion selbst (schwarz), die Fourier-Approximationen mit  $N = 1$  (blau),  $N = 3$  (violett) und  $N = 11$  (braun).

In der Abbildung 5.5 sind Fourier-Approximationen der vier Funktionen aus Abb. 5.2 dargestellt.

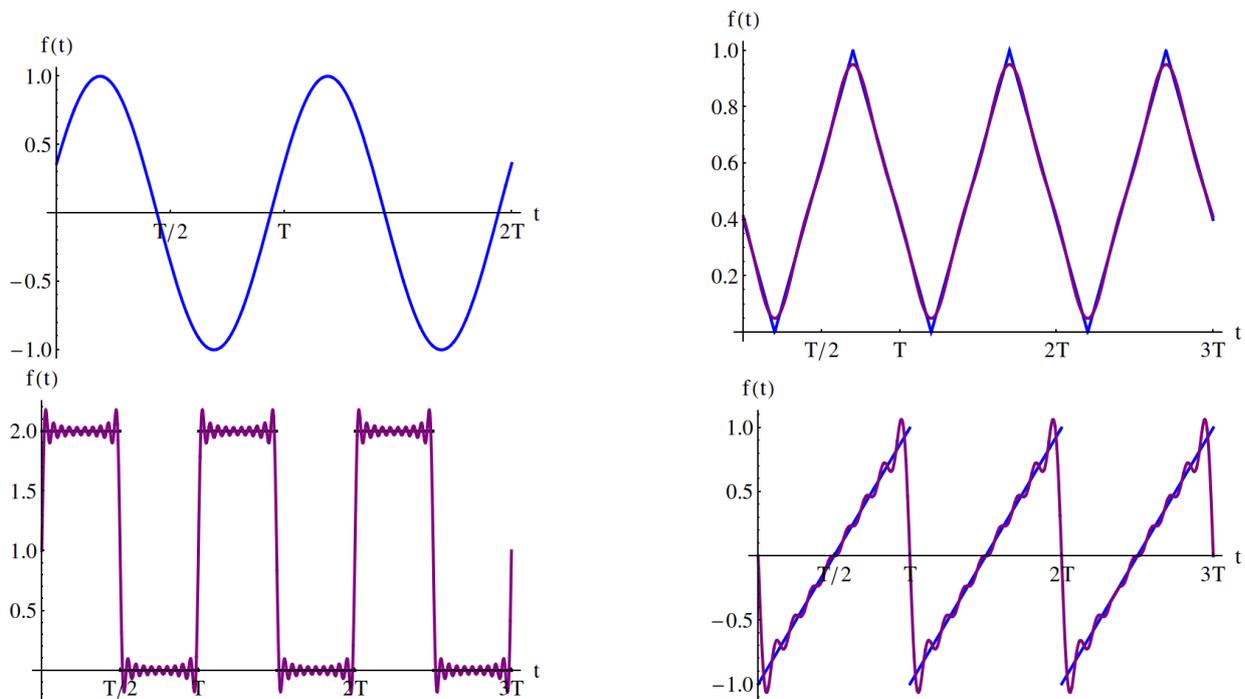


Abbildung 5.5: Fourier-Approximationen der vier Funktionen der Abb. 5.2. (a) Für die Sinus-Funktion  $\sin(\omega t - \varphi)$  genügt schon die Fourier-Reihe bis  $N = 1$ , (b) Dreiecksfunktion und ihre Fourier Reihe bis  $N = 3$ , (c) Rechteckfunktion und ihre Fourier-Reihe bis  $N = 20$ , (d) Sägezahnfunktion und ihre Fourier-Reihe bis  $N = 8$ .

### Umrechnung zwischen reellen und komplexen Fourierkoeffizienten

Wie stellt man nun den Zusammenhang der komplexen Schreibweise zur reellen Schreibweise her? Für reellwertige periodische Funktionen  $f(t)$  – und diese interessieren uns wegen ihrer Praxisrelevanz als Zeitsignale mehr als komplexwertige  $f(t)$  – gilt die Realitätsbedingung

$$f(t) = \overline{f(t)}. \quad (5.6)$$

Wir rechnen mal die rechte Seite aus, indem wir die Fourier-Reihe in zwei Reihen mit negativem und positiven  $k \in \mathbb{Z}$  aufsplitten:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} e^{-im\omega t} + c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \\ \Rightarrow \overline{f(t)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n} e^{-in\omega t} + \overline{c_0} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{c_m} e^{im\omega t} \end{aligned}$$

Setzt man dies nun in die Gleichung (5.6) ein, so erhält man

$$c_{-k} = \overline{c_k}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Das heisst, es gibt für reellwertige periodische  $f(t)$  eine Beziehung zwischen den komplexen Fourier-Koeffizienten mit positivem und negativem Index. Der DC-Anteil (konstanter Anteil)  $c_0$  ist der einzige reelle Fourier-Koeffizient. Damit können wir nun eine Beziehung zwischen den komplexen Fourierkoeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$  und den reellen Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_m$  herstellen:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{c_n} e^{-in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

Nun schreiben wir die  $c_n$  folgendermassen um:

$$c_n = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2}i.$$

wobei  $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ . Dann bekommen wir:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} i \right) e^{-in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2} i \right) e^{in\omega t} = \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n i \frac{e^{-in\omega t} - e^{in\omega t}}{2} = \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}}{2i} = \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \\
 &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) ,
 \end{aligned}$$

wobei wir im zweitletzten Schritt die Euler-Formeln für sin und cos benutzt haben. Wir können also mit

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2} i, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad c_0 = \frac{a_0}{2} \\
 a_n &= 2 \cdot \operatorname{Re}(c_n), \quad \text{und} \quad b_n = -2 \cdot \operatorname{Im}(c_n), \quad n \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

zwischen reellen und komplexen Fourier-Koeffizienten hin- und herwechseln.

### Beispiele

Wir wenden diese Umrechnung auf die Rechteckfunktion und die Sägezahnfunktion an:

- i) Für die Sägezahn-Funktion hatten wir die komplexen Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{i}{k \cdot \pi}$$

gefunden. Daraus erhält man in reeller Schreibweise

$$b_m = -\frac{2}{k \cdot \pi}, \quad m \in \mathbb{N}$$

Somit ist die Fourier-Reihe in reeller Schreibweise

$$f(t) = \frac{2t}{T} - 1 = -\frac{2}{\pi} \left( \sin(\omega t) + \frac{\sin(2\omega t)}{2} + \frac{\sin(3\omega t)}{3} + \frac{\sin(4\omega t)}{4} + \dots \right)$$

- ii) Umgekehrt haben wir für die Rechteck-Funktion aus Abb. 5.5 (c) die reellen Fourierkoeffizienten

$$a_0 = 2, \quad a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad b_m = \begin{cases} \frac{4}{m \cdot \pi} & m \text{ ungerade} \\ 0 & m \text{ gerade} \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die komplexen Fourier-Koeffizienten  $c_0 = 1$  und

$$c_k = \begin{cases} -\frac{2}{k \cdot \pi} i & k \text{ ungerade} \\ 0 & k \text{ gerade} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{N}$$

und  $c_{-k} = \overline{c_k}$ . Das ergibt die Fourier-Reihe

$$f(t) = 1 +$$

### 5.7.3 Amplituden-Phasen-Form der Fourierreihe

Es gibt noch eine weitere mögliche Schreibweise für die Fourier-Reihe, nämlich die **Amplituden-Phasen-Form**. Sie ist gegeben durch

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n).$$

Das Fourier-Spektrum besteht in dieser Form aus den Amplituden  $A_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und den Phasenverschiebungen  $\varphi_n$ . Man kann sich das so vorstellen: handelt es sich bei der Funktion  $f(t)$  z.B. um einen Ton oder Klang, dann ist die Amplitude  $A_1$  sozusagen die Stärke des Grundtons (Schwingung mit der Grundfrequenz) und die  $A_n$  für  $n > 1$  sind dann die Anteile der Obertöne. Die Phasenverschiebungen  $\varphi_n$  haben dabei keinen hörbaren Einfluss. Wie hängt nun diese Form der Fourierreihe mit den anderen Schreibweisen zusammen?

Benutzen wir das Additionstheorem aus der Trigonometrie

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

erhalten wir sofort, dass

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\omega t) \cos(\varphi_n) - A_n \sin(n\omega t) \sin(\varphi_n)) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(\varphi_n) \cos(n\omega t) - A_n \sin(\varphi_n) \sin(n\omega t)) . \end{aligned}$$

Durch Vergleich zur reellen Schreibweise finden wir sofort, dass  $a_n = A_n \cos(\varphi_n)$  und  $b_n = -A_n \sin(\varphi_n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Umgekehrt gilt:

$$a_n^2 + b_n^2 = A_n^2 \cos^2(\varphi_n) + A_n^2 \sin^2(\varphi_n) = A_n^2 ,$$

woraus sofort die Formel für die Amplituden

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

folgt. Wie ist dann der Zusammenhang zwischen der komplexen Schreibweise und der Amplituden-Phasen-Form?

Es gilt ja nun

$$c_n = \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2} i = \frac{A_n}{2} \cos(\varphi_n) + \frac{A_n}{2} \sin(\varphi_n) i = \frac{A_n}{2} \operatorname{cis}(\varphi_n) .$$

Daraus kann man ablesen, dass

$$|c_n| = \frac{A_n}{2} \quad \text{und} \quad \arg(c_n) = \varphi_n .$$

Die Phasenverschiebungen  $\varphi_n$  sind also gerade die Argumente der komplexen Fourierkoeffizienten (mit positivem Index  $n \in \mathbb{N}$ ). Das macht eine Umrechnung des komplexen Fourierspektrums in die Amplituden-Phasen-Form besonders einfach.

#### 5.7.4 Konvergenz der Fourier-Reihe

Zum Schluss dieses Abschnitts zur Fourier-Reihe wollen wir noch ein paar Worte zur Konvergenz der Fourier-Reihe verlieren. Wir schauen uns noch einmal die in Abb. 5.5 dargestellten Approximationen an. Nicht so überraschend ist die Konvergenz der Fourier-Reihe der Sinus-Funktion aus Abb. 5.5 (a) perfekt. Das ist ja gar keine Reihe. Bei der Dreiecksfunktion aus Abb. 5.5 (b), die zwar stetig ist aber an den Ecken nicht differenzierbar, beobachtet man, dass genau an den Ecken die Konvergenz etwas schlechter ist. Bei der Rechteckfunktion und dem Sägezahn der Abb. 5.5 (c) und (d), die beide Unstetigkeitsstellen haben, kommt es sogar an eben diesen Stellen zu Überschwingungen. Dieses sogenannte Gibbsche Phänomen lässt sich auch nicht durch ein höheres  $N$  verringern. Offensichtlich ist an den Sprungstellen die Konvergenz irgendwie schlechter. Alle diese Beobachtungen können durch Sätze zur Konvergenz der Fourier-Reihen erklärt werden.

- Jede Funktion  $f(t) \in L^2([0, T])$  konvergiert bezüglich der  $L^2$ -Norm. Das bedeutet, dass für die Approximation

$$f_N(t) := \sum_{k=-N}^N c_k e^{ik\omega t}$$

gilt, dass

$$\|f_N(t) - f(t)\|_{L^2} \longrightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty .$$

Da es sich bei  $\|\cdot\|_{L^2}$  um ein Integral handelt,

$$\|f_N(t) - f(t)\|_{L^2} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f_N(t) - f(t)|^2 dt},$$

bedeutet das nur, dass die Fläche zwischen  $f_N(t)$  und  $f(t)$  gegen Null strebt für grosse  $N$ . Diese Konvergenz ist zwar sehr allgemein (gilt für alle  $f(t)$ ), aber es ist nicht die Konvergenz, für welche wir uns interessieren.

- Ein stärkeres Resultat liefert der Satz von Dirichlet. Er besagt, dass falls sich für eine Funktion  $f(t) \in L^2([0, T])$  das Intervall  $[0, T]$  in endlich viele Teilintervalle zerlegen lässt, auf welchen  $f(t)$  stetig und monoton ist, und falls sich bei den (endlich vielen) Unstetigkeitsstellen die links- und rechtsseitige Grenzwerte existieren, die Fourier-Reihe **punktweise** gegen  $f(t)$  konvergiert, d.h.

$$\forall t \in [0, T] : \forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} : |f_N(t) - f(t)| < \varepsilon \quad \forall N > N_0$$

Für die in der Praxis vorkommenden Zeitsignale ist das ein sehr relevantes Resultat. Man hat es da sicher nie mit Funktionen zu tun, die unendlich viele Unstetigkeitsstellen haben. Man kann also fast für alle praxisrelevanten Funktionen eine Konvergenz der Fourier-Reihe zeigen, aber es ist nur eine punktweise Konvergenz.

- Die Fourier-Reihe einer stetigen und stückweise stetig differenzierbaren Funktion konvergiert **gleichmässig** (und damit auch punktweise) gegen  $f(t)$ . Zu dieser Kategorie gehört z.B. die Dreiecksfunktion, denn sie ist ja stetig und zwischen den "Ecken" stetig differenzierbar. Von einer gleichmässigen Konvergenz spricht man, wenn für  $f_N(t)$  gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N} : |f_N(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad \forall N > N_0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Die gleichmässige Konvergenz ist stärker als die punktweise Konvergenz. Anschaulich bedeutet die gleichmässige Konvergenz, dass  $f_N(t)$  sich für grosse  $N$  in einem immer schmalen Band um  $f(t)$  herum der Breite  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$ -Schlauch) befindet.

## 5.8 Diskrete Fouriertransformation

Aufgrund der Corona-Krise und das aus diesem Grund verkürzte Semester verzichten wir auf das Thema **Diskrete Fouriertransformation**. Im Fach Signale und Systeme wird die Fouriertransformation dann sowieso noch einmal behandelt.

# Kapitel 6

## Lineare Abbildungen und Matrizen

Das Ergebnis hab' ich schon, jetzt fehlt nur noch der Weg, der mich zu ihm führt.

---

Carl Friedrich Gauss

### 6.1 Lineare Abbildungen

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff der linearen Abbildung zwischen zwei Vektorräumen  $V$  und  $W$  ein. Etwas vereinfacht ausgedrückt, bedeutet die Linearität einer Abbildung, dass es keine Rolle spielt, ob man im Ausgangsraum  $V$  Vektorraumoperationen ausführt (d.h. Vektoren addiert und mit Skalaren multipliziert) und danach die Abbildung ausführt, oder ob man zuerst die Abbildung ausführt und danach im Bildraum  $W$  Vektorraumoperationen durchführt. Da  $V$  und  $W$  beides Vektorräume sind, tragen sie die gleiche lineare Rechenstruktur (Vektorraumaxiome) und die linearen Abbildungen (Homomorphismen) sind genau diejenigen Abbildungen, die diese Rechenstruktur respektieren. Das Paradebeispiel von linearen Abbildungen sind die Matrizen. Wir werden im nächsten Abschnitt sogar sehen, dass man jede lineare Abbildung auch als Matrix schreiben kann, sobald man in den Vektorräumen Basen eingeführt hat. Wir starten deshalb mit den Matrizen als einleitendes Beispiel:

#### 6.1.1 Matrizen als lineare Abbildungen

Eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  kann als eine Funktion oder Abbildung interpretiert werden. Sie macht dabei aus einem Vektor  $x \in \mathbb{K}^n$  einen Vektor  $A \cdot x \in \mathbb{K}^m$ . Mathematisch geschrieben lautet das:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ \mathbb{K}^n \ni x &\longmapsto Ax \in \mathbb{K}^m. \end{aligned}$$

Die Matrix bildet also einen Vektor  $x \in \mathbb{K}^n$  ( $n$  Einträge) auf einen Vektor  $Ax \in \mathbb{K}^m$  ab ( $m$  Einträge). Aus der Definition 3.2.1 des Produkts Matrix mal Vektor folgt, dass die Abbildung  $A$  die zwei folgenden Eigenschaften erfüllt:

- i)  $A(x + y) = Ax + Ay, \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n$
- ii)  $A(\lambda x) = \lambda(Ax), \quad \forall x \in \mathbb{K}^n, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Diese beiden Eigenschaften definieren die Linearität der Abbildung  $A$ .

#### Beispiel:

Betrachten wir als Beispiel eine (reelle)  $2 \times 2$ -Matrix  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wie kann man sich  $A$  als Abbildung vorstellen? Analysieren wir auf welche Vektoren die Standardbasisvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von  $A$  abgebildet werden. Wir erhalten

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Ae_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mit anderen Worten: was in den Spalten einer Matrix steht, das sind diejenigen Vektoren auf welche die Standardbasisvektoren  $e_i$  abgebildet werden. Zur weiteren Veranschaulichung schauen wir uns noch an, was die Matrix  $A$  mit einem Quadrat, gegeben durch die Eckpunkte  $P(1|1)$ ,  $Q(-1|1)$ ,  $R(-1|-1)$  und  $S(1|-1)$  anstellt (siehe Abb. 6.1).

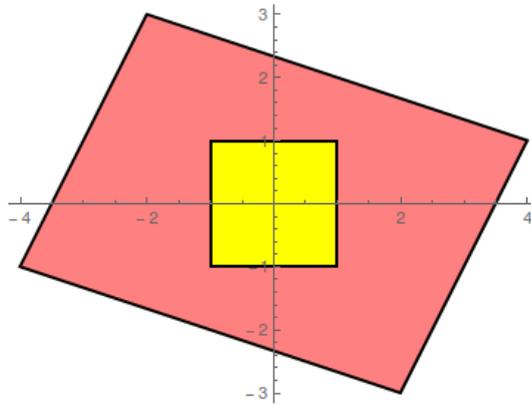


Abbildung 6.1: Wirkung der Matrix  $A$  auf das Quadrat  $PQRS$ . In Gelb das ursprüngliche Quadrat  $PQRS$  und in Rot das Parallelogramm  $\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}\tilde{S}$ , auf welches das Quadrat abgebildet wird.

Wir bekommen:

$$\begin{aligned} A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, & A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \\ A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, & A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Das Quadrat wird also durch die Matrix zu einem Parallelogramm  $\tilde{P}\tilde{Q}\tilde{R}\tilde{S}$  verzerrt und gedreht. Ausserdem hat sich der Umlaufsinn verändert. Wie schrecklich kompliziert, könnte man meinen. Aber eigentlich ist die Wirkung einer Matrix ziemlich brav. Denn gerade Strecken werden z. B. niemals gekrümmt, sondern bleiben gerade. Punkte bleiben Punkte und somit wird aus einem Viereck immer ein Viereck. Das ist in Worten ausgedrückt, was in der Mathematik als “linear” bezeichnet wird.

### 6.1.2 Homomorphismen

Verallgemeinern wir nun diese Eigenschaften der Matrizen auf Abbildung zwischen beliebigen Vektorräumen  $V$  und  $W$ :

#### Definition 6.1.1 (Lineare Abbildung)

Seien  $V$  und  $W$  zwei Vektorräume über dem selben Körper  $\mathbb{K}$ . Eine Abbildung

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow W, \\ V \ni v &\longmapsto f(v) \in W \end{aligned}$$

heisst **linear**, falls  $f$  folgende zwei Eigenschaften erfüllt:

- i)  $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
- ii)  $f(\lambda v) = \lambda f(v) \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Eine lineare Abbildung wird auch als **Homomorphismus** bezeichnet.

## Beispiele von linearen Abbildungen

- i) Die Ableitung von Funktionen ist eine lineare Abbildung. Zum Beispiel ist die Ableitung auf dem Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$ , definiert durch

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} : P_2 &\longrightarrow P_1 \\ p(x) &\longmapsto p'(x), \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung. Die Summenregel besagt nämlich, dass

$$(p(x) + q(x))' = p'(x) + q'(x), \quad \forall p(x), q(x) \in P_2$$

und ebenso ist

$$(\lambda p(x))' = \lambda p'(x) \quad \forall p(x) \in P_2, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Das sind aber genau die beiden Eigenschaften, die für die Linearität einer Abbildung erfüllt sein müssen.

- ii) Projektionen sind lineare Abbildungen. Betrachte als Beispiel die Abbildung

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung projiziert den dreidimensionalen Raum senkrecht auf die  $x_1x_2$ -Ebene. Man stellt leicht fest, dass man die Abbildung  $P$  durch die Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ausdrücken kann, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Damit ist klar, dass die Abbildung linear ist.

- iii) Spiegelungen sind lineare Abbildungen. Eine einfache Spiegelung ist z.B. die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Diese Abbildung kehrt das Vorzeichen der  $x_1$  Koordinate. Dies entspricht einer Spiegelung an der  $x_2x_3$ -Ebene.  $f$  lässt sich auch durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschreiben, denn es gilt ja

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- iv) Drehungen sind ebenfalls lineare Abbildungen. Die Matrix

$$O = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in SO(2)$$

wobei  $\varphi \in [0, 2\pi[$ , beschreibt die Drehung der Ebene  $\mathbb{R}^2$  um den Drehwinkel  $\varphi$ . Eine typische Eigenschaft von Matrizen, welche Drehungen beschreiben, ist die Orthogonalität. Sie erfüllen  $O^T O = \mathbb{1}$  und ihre Spalten bilden eine orthonormierte Basis.

v) Ein Beispiel einer Abbildung, die *nicht* linear ist, ist die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Wenn wir nämlich erstens

$$g \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) + g \left( \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

berechnen und zweitens

$$g \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = g \left( \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)(x_2 + y_2) \\ x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$

dann sehen wir, dass wir nicht dasselbe bekommen (in der 1. Komponente). Somit kann  $g$  nicht linear sein.

### Satz 6.1.2

Seien  $V$  und  $W$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Für jede lineare Abbildung  $f : V \longrightarrow W$  gilt:

i) Der Nullvektor  $0 \in V$  wird von  $f$  auf den Nullvektor  $0 \in W$  abgebildet, d.h.

$$f(0) = 0.$$

ii) Eine Linearkombination von Vektoren  $v_k$  wird auf eine Linearkombination der Bildvektoren  $f(v_k)$  abgebildet, d.h.

$$f \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(v_k).$$

Der vorhergehende Satz liefert ein Kriterium, mit dem man sofort ausschliessen kann, dass es sich bei einer Abbildung um eine lineare Abbildung handelt. Betrachten wir dazu das folgende Beispiel:

### Beispiel:

Sie  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine  $m \times n$ -Matrix und  $c \in \mathbb{R}^m$ ,  $c \neq 0$  ein beliebiger Vektor, der nicht der Nullvektor sein soll. Dann kann die Abbildung  $f$  definiert durch

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x \longmapsto Ax + c$$

offensichtlich nicht linear sein, denn die Eigenschaft i) aus Satz 6.1.2 ist nicht erfüllt, da

$$f(0) = A \cdot 0 + c = 0 + c = c \neq 0.$$

## 6.2 Matrix einer linearen Abbildung

Im letzten Abschnitt 6.1 haben wir gesehen, dass man Matrizen als lineare Abbildungen  $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$ ,  $x \longmapsto Ax$  auffassen kann, wobei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  eine  $m \times n$ -Matrix. In diesem Abschnitt werden wir darüber hinaus lernen, wie man umgekehrt sogar für jede beliebige lineare Abbildung  $f : V \longrightarrow W$  eine zugehörige Matrix finden kann. Und das ist noch nicht alles: wir werden auch zeigen, dass – nach der Wahl von Basen der Vektorräume – zu jeder linearen Abbildung genau eine Matrix gehört. Zum Einstieg nehmen wir als Beispiel einer linearen Abbildung die Ableitung eines Polynoms vom Grad  $\leq 2$ .

### Beispiel:

Seien  $P_2$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Polynome vom Grad  $\leq 2$  und  $P_1$  der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der linearen Polynome. Die Ableitung ist die lineare Abbildung

$$\frac{d}{dx} : P_2 \longrightarrow P_1 \\ p(x) \longmapsto p'(x).$$

Der erste Schritt, um die Matrix dieser Abbildung aufzustellen, ist immer in beiden Vektorräumen je eine Basis zu wählen. Die Matrix einer linearen Abbildung ist nämlich immer bezüglich von Basen definiert. Wir wählen hier die Basen möglichst einfach:

$$B_{P_2} = \{1, x, x^2\} \quad \text{Basis von } P_2$$

$$B_{P_1} = \{1, x\} \quad \text{Basis von } P_1.$$

Mit der Hilfe dieser gewählten Basen können wir jedes Polynom in  $P_2$  als Koordinatenvektor  $x \in \mathbb{R}^3$  verstehen und jedes Polynom in  $P_1$  als Koordinatenvektor  $y \in \mathbb{R}^2$ . In einem Diagramm dargestellt, sieht dieser Sachverhalt so aus:

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{\frac{d}{dx} \text{ linear}} & P_1 \\ B_{P_2} \downarrow & & \downarrow B_{P_1} \\ \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Die Matrix  $A$  der linearen Abbildung ist nun nichts anderes als der fehlende Verbindungspfeil zwischen dem  $\mathbb{R}^3$  und dem  $\mathbb{R}^2$  unten. Das vollständige Diagramm hat also die Form

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{\frac{d}{dx} \text{ linear}} & P_1 \\ B_{P_2} \downarrow & & \downarrow B_{P_1} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{A \in \mathbb{R}^{2 \times 3}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Dies nennt man ein sogenanntes **kommutatives Diagramm**. Man sieht auch sofort, dass die Matrix  $A$  zwei Zeilen und drei Spalten haben muss – das ist durch die Dimensionen der beiden Vektorräume  $P_2$  und  $P_1$  automatisch festgelegt. Die Matrix  $A$  bildet einen Vektor aus  $\mathbb{R}^3$  auf  $\mathbb{R}^2$  ab. Um nun die Matrix  $A$  aufzustellen, müssen wir die Bilder der Basisvektoren der Basis  $B_{P_2}$  ausrechnen. Diese Bilder drücken wir dann (als Linearkombinationen) in der Basis  $B_{P_1}$  aus. Die entsprechenden Koordinaten bilden die Spalten der Matrix  $A$ . Starten wir mit dem 1. Basisvektor aus  $B_{P_2}$ :

$$(1)' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x.$$

Die erste Spalte der Matrix  $A$  ist somit der Vektor  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Die weiteren Basisvektoren ergeben:

$$(x)' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x,$$

$$(x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x$$

Die Matrix  $A$  der linearen Abbildung

$$\frac{d}{dx} : P_2 \longrightarrow P_1$$

$$p(x) \longmapsto p'(x).$$

bezüglich der Basen  $B_{P_2}$  und  $B_{P_1}$  ist demnach

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es ist also immer wichtig zu sagen bezüglich welcher Basen eine Matrix zu verstehen ist. Die Matrix hängt davon ab, welche Basen man nimmt, wie wir weiter unten in diesem Abschnitt noch sehen werden. Was kann man nun mit der Matrix  $A$  anstellen? Man kann damit Polynome ableiten. Betrachte dazu zum Beispiel das Polynom

$$p(x) = 2x^2 - 3x + 4.$$

Wenn wir das Polynom ableiten, bekommen wir

$$p'(x) = 4x - 3.$$

Dies entspricht im kommutativen Diagramm dem Weg “obenrum”. Wenn wir nun den Weg “untenrum” über die Matrix  $A$  wählen, stellen wir  $p(x) \in P_2$  zuerst als Linearkombination in der Basis  $B_{P_2}$  (als Koordinatenvektor im  $\mathbb{R}^3$ ) dar. Dies entspricht dem Vektor

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Man beachte, dass die Reihenfolge der Basisvektoren in  $B_{P_2}$  wichtig ist. Die Matrix  $A$  wenden wir nun auf diesen Vektor  $\widehat{p}$  an, was

$$\widehat{p}' = A\widehat{p} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ergibt. Und tatsächlich entspricht der Koordinatenvektor  $\widehat{p}'$  als Linearkombination in der Basis  $B_{P_1}$  dem Polynom

$$p'(x) = -3 \cdot 1 + 4 \cdot x = 4x - 3.$$

Was tut also die Matrix  $A$ ? Man kann also mit der Matrix “untenrum” rechnen und dabei rechnet man in einfachen  $\mathbb{R}^n$ -Räumen. Das heisst, man hat es nur noch mit Spaltenvektoren und Matrizen zu tun. Das “obenrum” zwei abstrakte Vektorräume (die Menge von Polynomen) und eine (mehr oder weniger) komplizierte Abbildung (die Ableitung) steht, muss uns nicht mehr interessieren, sobald wir einmal die Matrix aufgestellt haben.

Das Prinzip aus dem letzten Beispiel lässt sich auf ganz allgemeine Vektorräume  $V$  und  $W$  und lineare Abbildungen  $f$  verallgemeinern:

**Definition 6.2.1 (Matrix einer linearen Abbildung)**

Seien  $V$  und  $W$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit den zugehörigen Basen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$  und  $\{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$ . Weiter sei

$$\begin{aligned} f &: V \longrightarrow W \\ V \ni v &\longmapsto f(v) \in W \end{aligned}$$

eine lineare Abbildung.

Die Matrix von  $f$  bezüglich der Basen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$  und  $\{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$  ist die  $m \times n$ -Matrix,

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \in \mathbb{K}^{m \times n},$$

deren Spalten die Koordinaten von  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  bezüglich der Basis  $\{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$  enthalten. Die Komponenten  $a_{ij} \in \mathbb{K}$  der Matrix  $A$  sind also gegeben durch die Formel

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Das Prinzip einer Matrix  $A$  zu einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow W$  kann durch das folgende kommutative Diagramm dargestellt werden:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f \text{ linear}} & W \\ B_V \downarrow & & \downarrow B_W \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{K}^{m \times n}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Wir können also nun für eine beliebige lineare Abbildung deren Matrix hinschreiben. Doch worin besteht der Vorteil diese Matrix zu kennen? Die Antwort gibt der folgende Satz, der aufzeigt, dass die Matrix die Koordinatenvektoren in  $V$  auf die Koordinatenvektoren in  $W$  abbildet.

**Satz 6.2.2 (Formel in Koordinaten)**

Sei  $v \in V$  ein beliebiger Vektor und  $f(v) \in W$  sein Bild in  $W$ . Bezüglich der Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  kann  $v$  als Koordinatenvektor

$$v = \sum_{j=1}^n x_j v_j \in V \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

geschrieben werden. Ebenso ist  $f(v)$  als Koordinatenvektor bezüglich  $\{w_1, \dots, w_m\}$  gegeben durch

$$f(v) = \sum_{i=1}^m y_i w_i \in W \quad \longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m.$$

Sei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  die Matrix von  $f$  bezüglich  $\{v_1, \dots, v_n\}$  und  $\{w_1, \dots, w_m\}$ . Dann gilt:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j,$$

d.h. der Koordinatenvektor  $y \in \mathbb{K}^m$  von  $f(v)$  bezüglich  $\{w_1, \dots, w_m\}$  ist gerade das Produkt

$$y = Ax \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

der Matrix  $A$  mit dem Koordinatenvektor  $x \in \mathbb{K}^n$  von  $v$  bezüglich  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

*Beweis.*

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{j=1}^n x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_j a_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) w_i \\ &\Rightarrow y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad \square \end{aligned}$$

### Satz 6.2.3

Seien  $V$  und  $W$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume. Der Vektorraum  $V$  habe die Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Seien zusätzlich die Vektoren  $u_1, \dots, u_n \in W$  gegeben. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  sodass  $f(v_j) = u_j$ .

Aus obigem Satz kann man eine wichtige Folgerung ziehen: Für zwei gegebene Vektorräume mit fest gewählten Basen und einer gegebenen Matrix  $A$  gibt es genau eine lineare Abbildung, deren Matrix bezüglich der gewählten Basen gerade die Matrix  $A$  ist. Das heisst, man kann nicht nur jeder linearen Abbildung eindeutig eine Matrix zuordnen, sondern es gilt auch die Umkehrung. Jeder Matrix ist - bezüglich gewählter Basen allerdings - in eindeutiger Weise eine lineare Abbildung zugeordnet. Hier kommt das betreffende Korollar:

### Korollar 6.2.4

Seien  $V$  und  $W$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit den Basen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$  und  $\{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$ . Sei  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  eine  $m \times n$ -Matrix. Dann gibt es eine eindeutige lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  derart, dass die Matrix von  $f$  bezüglich der Basen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$  und  $\{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$  gerade die Matrix  $A$  ist.

*Beweis.* Die Matrix  $A$  habe die Komponenten  $a_{ij}$ . Definiere die  $n$  Vektoren

$$u_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \in W, \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Gemäss dem Satz 6.2.3 gibt es dann genau eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$ , welche

$$f(v_j) = u_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

erfüllt. □

**Weitere Beispiele** (zu Matrizen von linearen Abbildungen):

i) Betrachte noch einmal die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} : P_2 &\longrightarrow P_1 \\ p(x) &\longmapsto p'(x). \end{aligned}$$

Wir wollen aber diesmal die Matrix  $\tilde{A}$  bezüglich anderer Basen

$$\begin{aligned}\tilde{B}_{P_2} &= \{1, x + x^2, x^2 - 2x\}, \\ \tilde{B}_{P_1} &= \{2, 2x\}.\end{aligned}$$

Wir müssen also die Basisvektoren von  $\tilde{B}_{P_2}$  ableiten:

$$\begin{aligned}1' &= 0 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2x, \\ (x^2 + x)' &= 2x + 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 1 \cdot 2x, \\ (x^2 - 2x)' &= 2x - 2 = (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2x.\end{aligned}$$

Die Matrix  $\tilde{A}$  bezüglich der Basen  $\tilde{B}_{P_2}$  und  $\tilde{B}_{P_1}$  ist

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Vergleich mit dem Beispiel eingangs dieses Abschnitts zeigt, dass die Einträge der Matrix von der Wahl der Basen abhängt.

ii) Wir betrachten die orthogonale Projektion

$$\begin{aligned}P : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Matrix von  $P$  bezüglich der Standardbasen

$$\{e_1, e_2, e_3\}$$

von  $\mathbb{R}^3$  und

$$\{e_1, e_2\}$$

von  $\mathbb{R}^2$  ergibt sich aus den Bildern der drei Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned}e_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ e_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ e_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die Matrix  $P$  dieser Abbildung bezüglich der Standardbasen ist also

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

iii) Spiegelung an der  $x_2$ -Achse im  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Bilder der Basisvektoren sind

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix von  $f$  bezüglich der Standardbasen.

### 6.3 Verkettung von linearen Abbildungen und Matrixprodukt

In diesem Abschnitt geht es darum, zwei oder mehrere lineare Abbildungen miteinander zu verketteten, also hintereinander auszuführen. Wir werden sehen, unter welchen Bedingungen dies möglich ist und wie man dann auch die Matrix einer solchen verketteten Abbildung bestimmt. Zuerst müssen wir uns allerdings die Frage stellen, ob eine Verkettung (oder Hintereinanderschaltung) von zwei linearen Abbildungen überhaupt wieder eine lineare Abbildung ergibt.

**Satz 6.3.1**

Seien  $U, V, W$  drei Vektorräume über demselben Körper  $\mathbb{K}$  und seien  $f : U \rightarrow V$  und  $g : V \rightarrow W$  zwei lineare Abbildungen. Dann ist die Verkettung

$$g \circ f : U \rightarrow W$$

ebenfalls wieder eine lineare Abbildung.

**Bemerkung:**

Die Notation  $g \circ f$  spricht man “ $g$  nach  $f$ ”. Dies bedeutet, dass man zuerst die Abbildung  $f$  ausführt und *danach* die Abbildung  $g$ .

*Beweis.* Wir müssen nachweisen, dass für die Abbildung  $g \circ f$  die beiden Linearitätseigenschaften erfüllt sind:

- Seien  $v_1, v_2 \in V$ :

$$(g \circ f)(v_1 + v_2) = g(f(v_1) + f(v_2)) = g(f(v_1)) + g(f(v_2)) = (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2)$$

- Sei  $v \in V$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

$$(g \circ f)(\lambda v) = g(\lambda f(v)) = \lambda g(f(v)) = \lambda(g \circ f)(v) \quad \square$$

Nun stellt sich natürlich sofort die Frage, wie denn die Matrix der linearen Abbildung  $g \circ f$  (bezüglich gewählter Basen von  $U$  und  $W$ ) aussieht, wenn man die Matrizen der einzelnen Abbildungen  $f$  und  $g$  bereits kennt. Wir wollen dies wieder anhand eines Beispiels herleiten.

**Beispiel:**

Wir wählen als Beispiel die Verkettung der Ableitung von Polynomen vom Grad  $\leq 3$ :

$$\begin{array}{ccccc} P_3 & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & P_2 & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & P_1 \\ B_{P_3} \downarrow & & \downarrow B_{P_2} & & \downarrow B_{P_1} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Die erste Abbildung ist also die Ableitung eines Polynoms vom Grad  $\leq 3$ , was immer ein Polynom vom Grad  $\leq 2$  liefert. Danach folgt nochmals eine Ableitung, die dann aus dem Polynom vom Grad  $\leq 2$  ein lineares Polynom macht. Wir berechnen zuerst die Matrizen  $A$  und  $B$  einzeln und dann die Matrix  $C$  der Verkettung direkt. Schliesslich werden wir die Matrix  $C$  dann als Matrixprodukt von  $B$  und  $A$  schreiben und daraus sehen, wie man Matrixprodukte ausrechnen.

a) Beginnen wir mit der Matrix  $A$ . Wir haben folgende Situation:

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{\frac{d}{dx} \text{ linear}} & P_2 \\ B_{P_3} \downarrow & & \downarrow B_{P_2} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Die beiden Basen dürfen wir selber festlegen. Wir wählen diese natürlich möglichst einfach, also

$$B_{P_3} = \{1, x, x^2, x^3\},$$

$$B_{P_2} = \{1, x, x^2\}.$$

Nun sind die Ableitungen der vier Basisvektoren aus  $B_{P_3}$  auszurechnen und diese als Linearkombination in den Basisvektoren von  $B_{P_2}$  zu schreiben:

$$(1)' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$(x)' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$(x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$(x^3)' = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2$$

Damit ist die Matrix  $A$  gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Schreiten wir zur Matrix  $B$ . Hier sieht das kommutative Diagramm so aus:

$$\begin{array}{ccc} P_2 & \xrightarrow{\frac{d}{dx} \text{ linear}} & P_1 \\ B_{P_2} \downarrow & & \downarrow B_{P_1} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Die Matrix von dieser Abbildung haben wir aber schon im Beispiel vorher berechnet. Sie lautet

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Testen wir nun, ob wir alles richtig gerechnet haben. Wir möchten z.B. das Polynom

$$p(x) = 2 - 3x + 4x^2 + x^3$$

zweimal ableiten. Das heisst, wir wenden auf den zu  $p(x)$  gehörenden Koordinatenvektor

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

(bezüglich der Basis  $B_{P_3}$ ) zuerst die Matrix  $A$  an und dann die Matrix  $B$ . Wir berechnen also

$$BAx = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Führen wir zuerst das Produkt

$$Ax = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aus. Auf das Resultat wenden wir die Matrix  $B$  an, also

$$BAx = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich der Basis  $B_{P_1}$  ist dies das Polynom  $8 - 6x$  und dies entspricht natürlich der 2. Ableitung  $p''(x)$ .

- c) Nun berechnen wir die Matrix  $C$  der Verkettung der beiden Abbildungen. Im kommutativen Diagramm kann man  $C$  so darstellen:

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2} \text{ linear}} & P_1 \\ B_{P_3} \downarrow & & \downarrow B_{P_1} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{C \in \mathbb{R}^{2 \times 4}} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Wir berechnen also diese Matrix  $C$ , indem wir die Basisvektoren in  $B_{P_3}$  allesamt zweimal ableiten:

$$\begin{aligned} (1)'' &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ (x)'' &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ (x^2)'' &= 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ (x^3)'' &= 6x = 0 \cdot 1 + 6 \cdot x. \end{aligned}$$

Die Matrix  $C$  ist also gegeben durch

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Als Test wenden wir  $C$  auf den Koordinatenvektor

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

an und bekommen

$$Cx = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Es passt also alles zusammen.

- d) Schliesslich möchten wir die Matrix  $C$  direkt aus dem Produkt aus  $A$  und  $B$ , nämlich

$$C = BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Es scheint also alles zusammenzupassen.

Für beliebige Vektorräume und lineare Abbildungen, ist das Matrixprodukt in dem folgenden Satz erklärt:

**Satz 6.3.2**

Seien  $U, V, W$  drei Vektorräume über demselben Körper  $\mathbb{K}$  und seien  $f : U \rightarrow V$  und  $g : V \rightarrow W$  zwei lineare Abbildungen. Die Abbildung  $f$  besitze bezüglich gewählter Basen  $\{u_1, \dots, u_n\}$  von  $U$  und  $\{v_1, \dots, v_l\}$  von  $V$  die Matrix

$$A = (a_{kj})_{\substack{k=1, \dots, l \\ j=1, \dots, n}} \in \mathbb{K}^{l \times n}.$$

Die Abbildung  $g$  habe bezüglich der Basen  $\{v_1, \dots, v_l\}$  von  $V$  und  $\{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$  die Matrix

$$B = (b_{ik})_{\substack{i=1, \dots, m \\ k=1, \dots, l}} \in \mathbb{K}^{m \times l}.$$

Dann besitzt die lineare Abbildung

$$g \circ f : U \rightarrow W$$

bezüglich  $\{u_1, \dots, u_n\}$  und  $\{w_1, \dots, w_m\}$  die  $m \times n$ -Matrix

$$C = (c_{ij})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} \in \mathbb{K}^{m \times n}$$

wobei  $C$  das Matrixprodukt von  $B$  mit  $A$  ist, nämlich

$$C = B \cdot A.$$

Das zum vorherigen Satz gehörende kommutative Diagramm sieht dann so aus:

$$\begin{array}{ccccc}
 U & \xrightarrow{f \text{ linear}} & V & \xrightarrow{g \text{ linear}} & W \\
 \downarrow B_U = \{u_1, \dots, u_n\} & & \downarrow B_V = \{v_1, \dots, v_l\} & & \downarrow B_W = \{w_1, \dots, w_m\} \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{K}^{l \times n}} & \mathbb{K}^l & \xrightarrow{B \in \mathbb{K}^{m \times l}} & \mathbb{K}^m
 \end{array}$$

**Bemerkungen:**

- Achtung!!  
Das Matrizenprodukt und damit die Verkettung von linearen Abbildungen ist **nicht** kommutativ, d.h. im Allgemeinen ist für zwei Matrizen  $A$  und  $B$ :

$$AB \neq BA,$$

sofern  $AB$  und  $BA$  definiert sind.

- Man mag die Nicht-Kommutativität des Matrizenprodukt für eine banale mathematische Tatsache halten. Aber diese Eigenschaft hat eine enorme Bedeutung in der Physik, genauer in der Quantenmechanik. Es stellt sich nämlich heraus, dass quantenmechanische Größen (sogenannte Observablen), wie z. B. die Energie eines Atoms, der Drehimpuls eines Elektrons im Atom oder der Impuls eines Elementarteilchens durch lineare Abbildungen – also durch Matrizen – beschrieben werden.<sup>1</sup> Hat man nun zwei solche quantenmechanische Größen oder Observablen  $A$  und  $B$  (stellen Sie sich also Matrizen darunter vor), so entscheidet der sogenannte Kommutator

$$[A, B] := AB - BA,$$

also die Differenz der beiden Matrizenprodukte darüber, ob die beiden Observablen gleichzeitig beliebig genau (man sagt auch beliebig “scharf”) messbar sind. Kommutieren die beiden Matrizen  $A$  und  $B$ , d.h.  $[A, B] = 0$  dann sind die beiden beliebig scharf messbar. Ein Beispiel dafür ist die Energie  $H$  eines Atoms und der Drehimpuls  $L$  eines Atoms, für welche  $[H, \vec{L}] = 0$  gilt. Man kann also – im Rahmen der messtechnischen Möglichkeiten – die Energie und den Drehimpuls eines Atoms beliebig genau messen. In einem anderen weltberühmt gewordenen Fall, geht das aber nicht. Für die Position  $x$  und den Impuls  $p$  eines Teilchens gilt nämlich

$$[x, p] = xp - px = i\hbar$$

und die sogenannte Planksche Konstante  $\hbar$  ist nicht null, sondern  $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ . Die vorherige Gleichung führt als Konsequenz auf die berühmte Heisenbergsche Unschärferelation, welche besagt, dass man den Ort und den Impuls eines Elementarteilchens niemals beliebig genau kennen kann. Wenn man die Position eines Teilchen misst, wird sein Impuls unscharf. Das Teilchen verhält sich wie ein Teilchen, hat aber keine klar definierte Geschwindigkeit. Bestimmt man dagegen den Impuls, wird die Position des Teilchens unscharf. Das Teilchen verhält sich wie eine Welle, die ja naturgemäss auch etwas über einen Raumbereich “verschmiertes” ist.

**Beispiel:**

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Hintereinanderschaltung einer Drehung und einer Streckung, was zu einer Drehstreckung führt. Die Matrix einer Drehung im  $\mathbb{R}^2$  um den Winkel  $\varphi$  ist gegeben durch

$$O = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Eine Streckung im  $\mathbb{R}^2$  um den Faktor  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist gegeben durch die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für die Verkettung dieser beiden linearen Abbildungen spielt die Reihenfolge keine Rolle:

$$SO = OS = \begin{pmatrix} \alpha \cos(\varphi) & -\alpha \sin(\varphi) \\ \alpha \sin(\varphi) & \alpha \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

---

<sup>1</sup>Diese Matrizen haben im Allgemeinen dann zwar unendlich viele Zeilen und Spalten, aber für die Betrachtungen hier spielt das keine Rolle.

### Satz 6.3.3

Die Verkettung von drei linearen Abbildungen  $f : V_1 \rightarrow V_2$ ,  $g : V_2 \rightarrow V_3$  und  $h : V_3 \rightarrow V_4$  ist assoziativ, d.h.

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Das zugehörige kommutative Diagramm sieht so aus:

$$\begin{array}{ccccccc} V_1 & \xrightarrow{f \text{ linear}} & V_2 & \xrightarrow{g \text{ linear}} & V_3 & \xrightarrow{h \text{ linear}} & V_4 \\ B_{V_1} \downarrow & & \downarrow B_{V_2} & & \downarrow B_{V_3} & & \downarrow B_{V_4} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{K}^{l \times n}} & \mathbb{K}^l & \xrightarrow{B \in \mathbb{K}^{j \times l}} & \mathbb{K}^j & \xrightarrow{B \in \mathbb{K}^{m \times j}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

## 6.4 Kern und Bild von linearen Abbildungen

In diesem Abschnitt lernen wir, wie man den sogenannten Kern und das sogenannte Bild von linearen Abbildungen berechnet. Beim Kern handelt es sich um die Menge der Vektoren, die von einer linearen Abbildung auf den Nullvektor abgebildet werden. Beim Bild handelt es sich um die Menge der Vektoren, auf die die Vektoren durch die lineare Abbildung abgebildet werden. Bevor wir diese beiden Begriffe exakt definieren, besprechen wir sie anhand eines einfachen Beispiels im  $\mathbb{R}^2$ :

### Beispiel:

Wir betrachten als Beispiel die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Als Erstes stellen wir mal die Matrix  $A$  von  $f$  bezüglich der Standardbasis auf. Dafür müssen wir die Bilder der Basisvektoren in die Spalten von  $A$  schreiben:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrix  $A$  von  $f$  bezüglich der Standardbasis ist somit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- i) Kern von  $f$ : gibt es Vektoren, die von der Abbildung  $f$  (also der Matrix  $A$ ) auf den Nullvektor abgebildet werden? Um diese Vektoren zu finden, müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$Ax = 0$$

lösen. Dies macht man - wie gewohnt - mit Hilfe des Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & -1 & \\ -1 & 1 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline \boxed{1} & -1 & \\ 0 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

Es gibt hier also eine Nullzeile und nur ein einziges Pivotelement, der Rang von  $A$  ist 1. Damit ist die Lösung eine Gerade:

$$\begin{aligned} x_2 = t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{und} \quad x_1 = x_2 = t, \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Diese Gerade durch den Nullpunkt ist der *Kern* der linearen Abbildung  $f$ . Man schreibt also:

$$\ker(f) = \ker(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Da die Gerade durch den Nullpunkt geht, handelt es sich beim Kern um einen Unterraum des  $\mathbb{R}^2$ .

ii) Bild von  $f$ : Offenbar sind alle Vektoren  $y = Ax$  ebenfalls auf einer Geraden. Es gilt nämlich

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t = x_1 - x_2 \in \mathbb{R}$$

Diese Gerade im  $\mathbb{R}^2$ , die ebenfalls durch den Nullpunkt geht, ist das *Bild* der linearen Abbildung  $f$ . Mathematisch sauber schreiben wir:

$$\text{im}(f) = \text{im}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

#### Definition 6.4.1 (Kern und Bild)

Seien  $V$  und  $W$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Der **Kern** der linearen Abbildung ist die Menge der Vektoren  $v \in V$ , die von  $f$  auf den Nullvektor  $0 \in W$  abgebildet werden:

$$\ker(f) := \left\{ v \in V \mid f(v) = 0 \right\}.$$

Das **Bild** der linearen Abbildung  $f$  ist die Menge von Vektoren  $w \in W$ , für die es (mindestens) einen Vektor  $v \in V$  gibt, der von  $f$  auf  $w$  abgebildet wird:

$$\text{im}(f) := \left\{ w \in W \mid w = f(v) \text{ für ein } v \in V \right\}.$$

#### Bemerkung:

Die Notationen “ker” und “im” stammen von den englischen Ausdrücken “kernel” und “image”.

#### Satz 6.4.2

- i)  $\ker(f)$  ist ein Unterraum von  $V$ .
- ii)  $\text{im}(f)$  ist ein Unterraum von  $W$ .

*Beweis.* i) Seien  $v_1, v_2 \in \ker(f)$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein beliebiger Skalar. Aufgrund der Linearität von  $f$  ist dann

$$\begin{aligned} f(v_1 + v_2) &= f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 = 0, \\ f(\lambda v_1) &= \lambda f(v_1) = 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $v_1 + v_2 \in \ker(f)$  und  $\lambda v_1 \in \ker(f)$ . Dann ist aber  $\ker(f)$  ein Unterraum von  $V$ .

- ii) Seien  $w_1 = f(v_1)$  und  $w_2 = f(v_2)$  zwei Vektoren im Bild von  $f$  und  $\lambda \in \mathbb{K}$  ein Skalar. Dann gilt wieder wegen der Linearität von  $f$ :

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= f(v_1) + f(v_2) = f(v_1 + v_2), \\ \lambda w_1 &= \lambda f(v_1) = f(\lambda v_1). \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt, dass  $w_1 + w_2 \in \text{im}(f)$  und  $\lambda w_1 \in \text{im}(f)$ . Somit ist  $\text{im}(f)$  ein Unterraum von  $W$ .  $\square$

#### Rezepte zur Berechnung von ker und im:

Seien  $V$  und  $W$  zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume und  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Wir nehmen an, dass wir bereits die Matrix  $A$  von  $f$  bezüglich gewählter Basen  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  und  $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$  aufgestellt haben:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f \text{ linear}} & W \\ B_V \downarrow & & \downarrow B_W \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{K}^{m \times n}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Die Matrix  $A$  von  $f$  bezüglich  $B_V$  und  $B_W$  ist also eine  $m \times n$ -Matrix.

- i) Kern von  $f$ :

- Löse das homogene lineare Gleichungssystem  $Ax = 0$  (Gauss-Algorithmus).

- Aus dem Abschnitt 3.3.5 über homogene lineare Gleichungssysteme wird klar, dass der Nullvektor **immer** im Kern sein muss. Weiter ist die Lösungsmenge von  $Ax = 0$  immer ein  $(n - r)$ -dimensionaler Unterraum von  $\mathbb{K}^n$ , wobei  $r = \text{rang}(A)$  die Anzahl Pivotelemente im Endschema des Gauss-Algorithmus ist. Im Fall maximalen Rangs  $r = n$ , ist der Kern trivial und enthält nur den Nullvektor.
- Man schreibt:

$$\ker(A) = \left\{ x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0 \right\}$$

$$\ker(f) = \left\{ v = \sum_{k=1}^n x_k v_k \in V \mid x \in \ker(A) \right\}.$$

ii) Bild von  $f$ :

- Die Spalten von  $A$  spannen das Bild von  $A$  auf. Das heisst, wir müssen nur noch die linear abhängigen Spalten wegstreichen und die Spalten die übrigbleiben, bilden eine Basis von  $\text{im}(A)$ .
- Wir führen also den Gauss-Algorithmus durch. Diejenigen Spalten, die im Endschema des Gauss-Algorithmus ein Pivot enthalten, sind linear unabhängig. Diese bilden die gesuchte Basis des Bildes von  $f$ .
- Da es also  $r = \text{rang}(A)$  linear unabhängige Spalten in  $A$  hat, gilt:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{im}(f)) = \text{rang}(A)$$

**Satz 6.4.3 (Rangsatz)**

Sei  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung, wobei  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n < \infty$ . Dann gilt:

$$\dim_{\mathbb{K}}(\ker(f)) + \dim_{\mathbb{K}}(\text{im}(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(V).$$

*Beweis.* Der Rangsatz wird aus den Berechnungsmethoden für Kern und Bild einer linearen Abbildung deutlich. Mit dem Gauss-Algorithmus findet man den Rang  $r$  der linearen Abbildung und dieser entspricht der Dimension des Bildes. Da es aber dann automatisch  $n - r$  Spalten ohne Pivotelement in der Zeilenstufenform der Matrix der linearen Abbildung geben muss, ist die Dimension des Kerns gleich  $n - r$ . Addiert man diese Dimensionen kommt man immer auf  $n$ . □

**Aufgaben:**

Man berechne je eine Basis des Kerns und des Bildes der folgenden Abbildungen:

1.

$$A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

2.

$$B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3.

$$C : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

4. Die zweite Ableitung von Polynomen vom Grad  $\leq 3$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} : P_3 &\longrightarrow P_3 \\ p(x) &\longmapsto p''(x) \end{aligned}$$

### Lösungen zu den Aufgaben:

1. Der Gauss-Algorithmus liefert:

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 2 & 2 & \\ 3 & 2 & \\ 5 & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 1 & \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{array}$$

Das heisst  $\text{rang}(A) = 2$ . Die Spalten sind also linear unabhängig. Das Bild von  $A$  ist also die Ebene

$$\text{im}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

durch den Nullpunkt. Das homogene lineare Gleichungssystem  $Ax = 0$  hat nur die Lösung  $x_1 = x_2 = 0$ . Damit ist der Kern trivial,

$$\ker(A) = \{0\}.$$

2. Bei dieser Matrix liefert der Gauss-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 0 & 1 & \\ 2 & 0 & 1 & \\ 0 & 2 & 2 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Wir bekommen  $\text{rang}(B) = 2$ . Eine Basis des Bildes wird also von den ersten beiden Spaltenvektoren von  $B$  gebildet. Somit

$$\text{im}(B) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Die Lösung von  $Bx = 0$  liefert:

$$x_3 = t, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x_2 = -x_3 = -t, \quad \text{sowie} \quad x_1 = -\frac{x_3}{2} = -\frac{t}{2}.$$

Der Kern von  $B$  ist also die Gerade

$$\ker(B) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Der Gauss-Algorithmus für die Matrix  $C$  führt auf:

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & \\ 2 & 2 & 2 & 10 & 0 & \\ 0 & 3 & -3 & 9 & -3 & \\ -1 & 0 & -2 & -2 & -1 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

Wir haben hier  $\text{rang}(C) = 2$ , d.h. wir erwarten einen 3-dimensionalen Kern. Das Bild von  $C$  ist die Ebene im  $\mathbb{R}^4$  gegeben durch:

$$\text{im}(C) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Das Gleichungssystem  $Cx = 0$  liefert die Lösungen

$$x_3 = s, \quad x_4 = t, \quad x_5 = u, \quad s, t, u \in \mathbb{R}$$

Weiter ergeben sich für  $x_2$  und  $x_1$ :

$$\begin{aligned} x_2 &= x_5 - 3x_4 + x_3 = s - 3t + u, \\ x_1 &= -x_5 - 2x_4 - 2x_3 = -2s - 2t - u. \end{aligned}$$

Der Kern ist also ein 3-dimensionaler Unterraum des  $\mathbb{R}^5$  gegeben durch:

$$\ker(C) = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 \mid x = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t, u \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Bei diesem Beispiel kann man den Kern und das Bild finden, ohne dass man rechnet. Es ist von vornherein klar, dass alle linearen Polynome vom Grad  $\leq 1$  zweimal abgeleitet null ergeben. Das heisst, der Kern von  $\frac{d^2}{dx^2}$  sind die linearen Polynome

$$\ker\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) = P_1.$$

Das Bild ist ebenfalls der Vektorraum  $P_1$ ,

$$\operatorname{im}\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) = P_1,$$

denn wenn man ein Polynom aus  $P_3$  ableitet, erhält man ebenfalls ein Polynom aus  $P_1$ .

Natürlich kann man das Resultat auch auf rein rechnerischem Weg erhalten dadurch stellen wir zuerst die Matrix  $D$  der Abbildung

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} : P_3 &\longrightarrow P_3 \\ p(x) &\longmapsto p''(x) \end{aligned}$$

bezüglich der Basis  $\{1, x, x^2, x^3\}$  auf. Es ist

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{f \text{ linear}} & P_3 \\ \{1, x, x^2, x^3\} \downarrow & & \downarrow \{1, x, x^2, x^3\} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{D \in \mathbb{R}^{4 \times 4}} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Die Bilder der Basisvektoren sind

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}(1) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ \frac{d^2}{dx^2}(x) &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ \frac{d^2}{dx^2}(x^2) &= 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 \\ \frac{d^2}{dx^2}(x^3) &= 6x = 0 \cdot 1 + 6 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3. \end{aligned}$$

Die Matrix  $D$  ist damit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Kästchen deuten an, dass  $D$  bereits in der Zeilenstufenform vorliegt. D.h.  $\text{rang}(A) = 2$  und damit ist das Bild von  $D$ :

$$\text{im}(D) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für das Bild von  $\frac{d^2}{dx^2}$  ergeben sich daraus genau die linearen Polynome, nämlich

$$\text{im}\left(\frac{d^2}{dx^2}\right) = \{p(x) \in P_3 \mid s \cdot 1 + t \cdot x, s, t \in \mathbb{R}\} = P_1$$

Für den Kern von  $D$  erhalten wir

$$x_1 = s, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

also

$$\text{ker}(D) = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

## 6.5 Isomorphismen

### 6.5.1 Aus der Analysis: Umkehrabbildungen

Wir behandeln in diesem Paragraphen, was unter der Umkehrabbildung oder Inversen einer Abbildung zu verstehen ist. Das hier Besprochene ist nicht nur für lineare Abbildungen gültig, sondern ist auf beliebige Abbildungen oder Funktionen anwendbar (vgl. Analysisvorlesung):

#### Definition 6.5.1

Seien  $X$  und  $Y$  beliebige Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung (die nicht linear sein muss). Dann definieren wir:

- $f$  heisst **surjektiv**  $\Leftrightarrow f(X) = Y$ ,
- $f$  heisst **injektiv**  $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ ,
- $f$  heisst **bijektiv**  $\Leftrightarrow f$  ist injektiv und surjektiv.

#### Satz 6.5.2

Sei  $f : X \rightarrow Y$  eine bijektive Abbildung. Dann gibt es eine eindeutige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$ , sodass

$$g \circ f = \text{id}_X \quad \text{und} \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

das heisst:

$$g(f(x)) = x \quad \forall x \in X \quad \text{und} \quad f(g(y)) = y \quad \forall y \in Y.$$

Die Abbildung  $g$  heisst **Umkehrabbildung** oder **inverse Abbildung** von  $f$  und wird mit dem Symbol  $f^{-1}$  bezeichnet.

#### Bemerkung:

Achtung!!

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}.$$

#### Beispiele:

i) Die Funktion

$$f : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[ \\ x \mapsto f(x) = x^2$$

ist bijektiv. Die Umkehrfunktion ist die Funktion

$$f^{-1} : [0, \infty[ \longrightarrow [0, \infty[ \\ y \longmapsto f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

Es ist nämlich

$$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = x \\ f(f^{-1}(y)) = f(\sqrt{y}) = y.$$

Wählen wir jedoch als Definitionsbereich die ganze reelle Zahlengerade  $\mathbb{R}$ , dann ist  $f$  nicht injektiv (also auch nicht bijektiv).

ii) Exponentialfunktion und Logarithmus (auf  $\mathbb{R}$ ). Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow ]0, \infty[ \\ x \longmapsto \exp(x) = e^x$$

ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist der (reelle) natürliche Logarithmus:

$$\exp^{-1} : ]0, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto \exp^{-1}(y) := \ln(y).$$

Denn es gilt selbstverständlich

$$\ln(\exp(x)) = \ln(e^x) = x \\ \exp(\ln(y)) = e^{\ln(y)} = y.$$

Man beachte, dass man die Null im Wertebereich von  $\exp$  explizit ausschliessen muss. Wenn man die Null im Wertebereich dazufügt, dann ist  $\exp$  nicht mehr surjektiv (also auch nicht bijektiv).  $e^x$  kann für kein  $x \in \mathbb{R}$  null ergeben. Dann hat die Umkehrfunktion  $\ln$  keinen richtig definierten Definitionsbereich mehr, denn  $\ln(0)$  ist nicht definiert.

iii) Trigonometrische Funktionen und zyklometrische Funktionen. Wir betrachten als Beispiel den Cosinus auf ganz  $\mathbb{R}$ :

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x).$$

Mit diesem Definitions- und Wertebereich ist  $\cos$  weder surjektiv noch injektiv. Schränkt man jedoch diese auf geeignete Weise ein, kann man  $\cos$  bijektiv machen und somit die Umkehrfunktion (der arccos) einführen. Um  $\cos$  surjektiv zu machen, müssen wir den Wertebereich einschränken. Es ist klar, dass für jedes  $x \in \mathbb{R}$   $\cos(x) \in [-1, 1]$  ist. Somit ist

$$\cos : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \cos(x).$$

surjektiv. Das ist die eine Seite der Medaille. Um  $\cos$  auch noch injektiv zu machen, müssen wir den Definitionsbereich einschränken. Am Einheitskreis ist ersichtlich, dass bereits im Intervall  $[0, 2\pi]$  immer zwei Winkel gibt, die denselben Cosinus haben (z.B.  $\cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$ ). Wir müssen uns also auf eine Hälfte des Einheitskreises beschränken. Man einigt sich auf das Intervall  $[0, \pi]$ , also die obere Hälfte des Einheitskreises. Dann ist

$$\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \\ x \longmapsto \cos(x)$$

bijektiv. Und die Umkehrfunktion von  $\cos$  ist die zyklometrische Funktion

$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \\ y \longmapsto \cos^{-1}(y) := \arccos(y).$$

Dann ist natürlich wieder

$$\arccos(\cos(x)) = x \\ \cos(\arccos(y)) = y.$$

**Bemerkung:**

Am Beispiel des Cosinus zuvor, kann man sehen, dass man durch Einschränkung des Wertebereichs eine Funktion immer surjektiv machen kann. Ist eine Funktion

$$f : X \longrightarrow Y$$

nicht surjektiv. So definiert man einen neuen Wertebereich  $Z := f(X) \subset Y$  und betrachtet stattdessen

$$f : X \longrightarrow Z.$$

Dieses  $f$  ist dann surjektiv, denn  $f(X) = Z$ .

**6.5.2 Umkehrung von linearen Abbildungen**

Nun wenden wir das im vorherigen Paragraphen Gelernte auf lineare Abbildungen an. Zuerst überlegen wir uns, was Bijektivität für lineare Abbildungen bedeutet.

**Satz 6.5.3**

Sei  $f : V \longrightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann gilt:

- i)  $f$  injektiv ( $f$  ist ein Monomorphismus)  $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\}$
- ii)  $f$  surjektiv ( $f$  ist ein Epimorphismus)  $\Leftrightarrow \operatorname{im}(f) = W$

*Beweis.* Der Beweis des 2. Teils dieses Satzes ist ein Beispiel für einen Widerspruchsbeweis. Das heisst, man nimmt das Gegenteil der Behauptung an und leitet einen Widerspruch her. Man zeigt also, dass das Gegenteil der Behauptung falsch sein muss und somit ist die Behauptung richtig.

i) Folgt direkt aus den Definitionen.

ii)  $\Rightarrow$ :

Sei  $v \in \ker(f)$  und  $v \neq 0$ . Dann ist  $f(0) = f(v) = 0$ . Dann ist  $f$  nicht injektiv.

$\Leftarrow$ :

Sei  $f$  nicht injektiv. Dann gibt es zwei Vektoren  $v_1 \neq v_2$ , sodass  $f(v_1) = f(v_2)$ . Dann ist aber der Vektor  $v_1 - v_2 \in \ker(f)$ , weil

$$f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 0.$$

Wenn aber der Vektor  $v_1 - v_2 \neq 0$  im Kern enthalten ist, dann ist  $\ker(f) \neq \{0\}$ . □

Die Injektivität von linearen Abbildungen hat also etwas mit dem Kern von linearen Abbildungen zu tun, die Surjektivität bezieht sich auf das Bild von linearen Abbildungen. Falls eine lineare Abbildung beide Eigenschaften aufweist, ist sie invertierbar. Diese Abbildungen haben eine spezielle Bezeichnung:

**Definition 6.5.4 (Isomorphismus)**

Eine bijektive lineare Abbildung heisst **Isomorphismus**. Falls zwischen zwei  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen  $V$  und  $W$  ein Isomorphismus  $f : V \longrightarrow W$  existiert, so heissen  $V$  und  $W$  **isomorph** und man schreibt dafür  $V \cong W$

**Satz 6.5.5**

Sei  $f : V \longrightarrow W$  ein Isomorphismus. Dann gibt es eine eindeutige *lineare* Abbildung  $g : W \longrightarrow V$ , sodass

$$g \circ f = \operatorname{id}_V \quad \text{und} \quad f \circ g = \operatorname{id}_W$$

das heisst:

$$g(f(v)) = v \quad \forall v \in V \quad \text{und} \quad f(g(w)) = w \quad \forall w \in W.$$

Die Abbildung  $g$  heisst die **Umkehrabbildung** oder **inverse Abbildung** von  $f$  und wird mit  $f^{-1}$  bezeichnet.

*Beweis.* Die Existenz und Eindeutigkeit ist für beliebige Abbildungen gültig (Satz 6.5.2). Daher genügt es zu zeigen, dass  $f^{-1}$  linear ist. Seien  $w_1, w_2 \in W$ . Dann ist:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= f(f^{-1}(w_1 + w_2)) \\ w_1 + w_2 &= f(f^{-1}(w_1)) + f(f^{-1}(w_2)) \end{aligned}$$

und somit

$$f(f^{-1}(w_1 + w_2)) = f(f^{-1}(w_1)) + f(f^{-1}(w_2)).$$

Da aber  $f$  injektiv ist, folgt daraus, dass

$$f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2).$$

Analog zeigt man, dass

$$f^{-1}(\lambda w) = \lambda f^{-1}(w) \quad \forall w \in W, \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \square$$

**Bemerkung:**

Sei  $V$  ein endlich-erzeugter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, d.h.  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n < \infty$ . Sei  $f : V \rightarrow W$  ein Isomorphismus und  $\{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $V$ .

- Da  $f$  surjektiv ist, spannen die Bilder der Basisvektoren  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  den Vektorraum  $W$  auf, d.h. sie bilden ein Erzeugendensystem von  $W$ .
- Da  $f$  injektiv ist, sind die Bilder der Basisvektoren  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  linear unabhängig.

Das heisst,  $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$  ist eine Basis von  $W$ . Mit anderen Worten: Isomorphismen bilden Basen von  $V$  auf Basen von  $W$  ab und demnach gilt auch:

$$V \cong W \quad \Leftrightarrow \quad \dim_{\mathbb{K}}(V) = \dim_{\mathbb{K}}(W)$$

**Beispiele:**

i) Die lineare Abbildung  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

kann nicht surjektiv sein, denn die beiden Spaltenvektoren können ja niemals den ganzen  $\mathbb{R}^3$  aufspannen. Dafür braucht es drei Vektoren.  $A$  ist also nicht surjektiv. Um zu entscheiden, ob  $A$  injektiv ist, müssen wir herausfinden, ob die beiden Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Entweder man sieht es den beiden Vektoren an, oder man berechnet den Kern von  $A$ :

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 2 & 3 & \\ 1 & 2 & \\ 0 & 4 & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline \boxed{2} & 3 & \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & \\ 0 & 0 & \end{array}$$

Der Rang von  $A$  ist 2, das heisst wir haben zwei linear unabhängige Spalten in  $A$ . Also ist  $A$  injektiv.

ii) Die lineare Abbildung  $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

kann nicht injektiv sein. Denn  $B$  enthält drei Spaltenvektoren im  $\mathbb{R}^2$ , welche natürlich niemals linear unabhängig sein können. Um herauszufinden, ob  $B$  surjektiv ist, muss man bestimmen, ob die Spalten von  $B$  den  $\mathbb{R}^2$  aufspannen. Wir berechnen also das Bild von  $B$ :

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 3 & 0 & \\ 1 & 2 & 5 & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{2} & 3 & 0 & \\ 0 & \boxed{\frac{1}{2}} & 5 & \end{array}$$

Der Rang von  $B$  ist 2. Damit spannen die Spalten von  $B$  den  $\mathbb{R}^2$  auf und  $B$  ist surjektiv.

**Satz 6.5.6**

Jeder endlich-erzeugte  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  mit  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n < \infty$  ist isomorph zum  $\mathbb{K}^n$ .

**Bemerkung:**

Wir haben die Tatsache, dass  $V \cong \mathbb{K}^n$  bereits verwendet, nämlich im kommutativen Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f \text{ linear}} & W \\ k_{B_V} \downarrow & & \downarrow k_{B_W} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{K}^{m \times n}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Hat man eine Basis  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$  gewählt, dann ist der Isomorphismus  $k_{B_V} : V \rightarrow \mathbb{K}^n$  durch

$$k_{B_V}(v) = k_{B_V} \left( \sum_{k=1}^n x_k v_k \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

definiert. Das heisst,  $k_{B_V}$  ordnet jedem Vektor  $v \in V$  seinen Koordinatenvektor bezüglich der Basis  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  zu.

### 6.5.3 Matrix der Umkehrabbildung

Wir haben gesehen, dass eine bijektive lineare Abbildung  $f$  eine eindeutige lineare Umkehrabbildung  $f^{-1}$  besitzt. Wir fragen uns natürlich nun, wie man die Matrix dieser Umkehrabbildung berechnen kann, wenn man die Matrix der Abbildung  $f$  bereits kennt. Es ist klar, dass wenn  $A$  die Matrix eines Isomorphismus  $f : V \rightarrow W$  ist, dass dann die Matrix der Umkehrabbildung  $f^{-1}$  (bezüglich der gleichen Basen von  $V$  und  $W$ ) die inverse Matrix  $A^{-1}$  sein muss. Dies wird anschaulich aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f \text{ linear}} & W \\ B_V \downarrow & & \downarrow B_W \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A \in \mathbb{K}^{m \times n}} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

klar. Denn alle Abbildungen darin sind Isomorphismen, die Pfeile daher alle umkehrbar.

## 6.6 Basiswechsel

Nehmen wir an, wir kennen die Matrix einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow W$  bezüglich vorgegebener Basen  $B_V$  von  $V$  und  $B_W$  von  $W$ . Wie findet man dann die Matrix derselben linearen Abbildung  $f$ , aber bezüglich neuer Basen  $\tilde{B}_V$  von  $V$  und  $\tilde{B}_W$  von  $W$ ? Um diese Matrix zu berechnen, müssen wir in beiden Vektorräumen  $V$  und  $W$  einen Basiswechsel durchführen. Ein Basiswechsel ist im Prinzip selber eine lineare Abbildung und wird ebenfalls durch eine Matrix beschrieben. Wir wollen den Basiswechsel zuerst anhand eines Beispiels kennenlernen:

**Beispiel** (Matrix des Basiswechsels):

Wir betrachten als Beispiel den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $P_3$  der Polynome vom Grad  $\leq 3$  mit den beiden Basen

$$\begin{aligned} B_{P_3} &= \{1, x, x^2, x^3\}, \\ \tilde{B}_{P_3} &= \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun die Matrix des Basiswechsels von der "alten" Basis  $B_{P_3}$  in die "neue" Basis  $\tilde{B}_{P_3}$  aufstellen. Man definiert diese Matrix des Basiswechsels als die Matrix der Identitätsabbildung

$$\begin{aligned} \text{id}_{P_3} : P_3 &\rightarrow P_3 \\ p(x) &\mapsto p(x) \end{aligned}$$

bezüglich der Basen  $B_{P_3}$  und  $\tilde{B}_{P_3}$ . Als kommutatives Diagramm sieht die Situation also so aus:

$$\begin{array}{ccc} P_3 & \xrightarrow{\text{id}_{P_3}} & P_3 \\ B_{P_3} \downarrow & & \downarrow \tilde{B}_{P_3} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{T \in \mathbb{K}^{4 \times 4}} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Berechnen wir nun also die Matrix des Basiswechsels. Dafür müssen wir die Basisvektoren der “alten” Basis bezüglich der Basisvektoren der “neuen” Basis ausdrücken:

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2 + 0 \cdot (x-1)^3, \\ x &\mapsto x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2 + 0 \cdot (x-1)^3, \\ x^2 &\mapsto x^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1)^2 + 0 \cdot (x-1)^3, \\ x^3 &\mapsto x^3 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot (x-1) + 3 \cdot (x-1)^2 + 1 \cdot (x-1)^3. \end{aligned}$$

Die Matrix  $T$  des Basiswechsels  $B_{P_3} \rightarrow \tilde{B}_{P_3}$  ist somit gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix enthält also als Spalten die Koordinaten der “alten” Basisvektoren bezüglich der “neuen” Basisvektoren. Selbstverständlich muss die Matrix  $T$  eines Basiswechsels regulär sein, denn der Basiswechsel muss in beide Richtungen möglich sein. Die Inverse der Matrix  $T$  ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ x-1 &\mapsto x-1 = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ (x-1)^2 &\mapsto (x-1)^2 = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3, \\ (x-1)^3 &\mapsto (x-1)^3 = (-1) \cdot 1 + 3 \cdot x + (-3) \cdot x^2 + 1 \cdot x^3. \end{aligned}$$

Die inverse Matrix ist damit

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $T^{-1}$  hätte man auch durch Invertieren (Gauss-Jordan-Algorithmus) der Matrix  $T$  herausfinden können. Man beachte, dass die Reihenfolge der Basisvektoren in den beiden Basen wichtig ist.

Wir wollen die Matrix des Basiswechsels nun auf beliebige Vektorräume  $V$  verallgemeinern:

**Definition 6.6.1 (Matrix des Basiswechsels)**

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  die “alte” Basis von  $V$  und  $\tilde{B}_V = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$  die “neue” Basis von  $V$ . Die Matrix  $T = (t_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  definiert durch

$$v_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} \tilde{v}_i$$

heißt **Matrix des Basiswechsels**.

**Satz 6.6.2**

Seien  $x_1, \dots, x_n$  die Koordinaten eines Vektors  $v \in V$  bezüglich der alten Basis  $B_V$  und  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$  die Koordinaten von  $v$  bezüglich der neuen Basis  $\tilde{B}_V$ . Dann gilt:

$$\tilde{x}_i = \sum_{j=1}^n t_{ij} x_j \quad \text{oder} \quad \tilde{x} = Tx$$

**Bemerkungen:**

- Die Matrix  $T$  enthält als Spalten die Koordinaten der alten Basisvektoren bezüglich der neuen Basis.
- Die Matrix des Basiswechsels  $T$  ist die Matrix der Identitätsabbildung  $\text{id}_V : V \rightarrow V$ ,  $v \mapsto v$  bezüglich der Basen  $B_V$  und  $\tilde{B}_V$ .
- Satz 6.6.2 zeigt, dass man mit Hilfe der Matrix  $T$  “alte” Koordinaten in “neue” Koordinaten umrechnen kann. Das heißt, wendet man  $T$  auf einen Koordinatenvektor in der alten Basis an, erhält man den Koordinatenvektor des Vektors in der neuen Basis als Resultat.

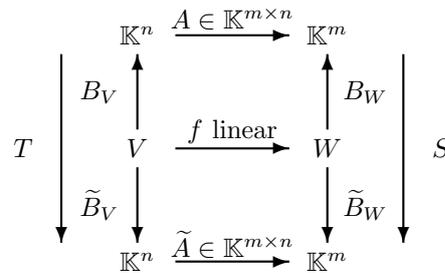
**Satz 6.6.3 (Basiswechsel)**

Seien  $f : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung und  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  die Matrix von  $f$  bezüglich der "alten" Basen  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$  und  $B_W = \{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$ . Dann ist die Matrix von  $f$  bezüglich "neuer" Basen  $\tilde{B}_V = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$  von  $V$  und  $\tilde{B}_W = \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m\}$  von  $W$  gegeben durch

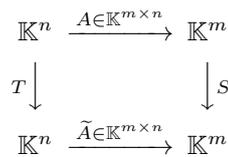
$$\tilde{A} = SAT^{-1}, \tag{6.1}$$

wobei  $T$  die Matrix des Basiswechsels von  $B_V$  nach  $\tilde{B}_V$  und  $S$  die Matrix des Basiswechsels von  $B_W$  nach  $\tilde{B}_W$  sind.

Den Sachverhalt der Gleichung (6.1) kann mit folgendem kommutativen Diagramm anschaulich dargestellt werden:



Vereinfacht kann man das kommutative Diagramm auch so zeichnen,



indem man die beiden Vektorräume  $V$  und  $W$  in der Mitte weglässt und nur in Matrizen denkt. Am kommutativen Diagramm lässt sich auch die Formel leicht ablesen.

Die Gleichung (6.1) ist sozusagen die Master-Gleichung, um einen Basiswechsel zu bewerkstelligen. Hat man die Matrizen der Basiswechsel  $S$  und  $T$  aufgestellt, erhält man die Matrix  $\tilde{A}$  bezüglich der neuen Basis durch ein einfaches Matrixprodukt. Die Anwendung der Formel (6.1) wollen wir nun anhand des zuvor schon betrachteten Beispiels üben:

**Beispiel:**

Wir betrachten auf dem Vektorraum  $P_3$  der reellen Polynome vom Grad  $\leq 3$  die 2. Ableitung

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{dx^2} : P_3 &\rightarrow P_1, \\
 p(x) &\mapsto p''(x).
 \end{aligned}$$

Die 2. Ableitung ist eine lineare Abbildung. Bezüglich der beiden Standardbasen

$$\begin{aligned}
 B_{P_3} &= \{1, x, x^2, x^3\}, \\
 B_{P_1} &= \{1, x\}.
 \end{aligned}$$

haben wir die Matrix der 2. Ableitung  $\frac{d^2}{dx^2}$  bereits in Abschnitt 6.3 im Beispiel zur Verkettung von linearen Abbildungen ausgerechnet. Diese Matrix ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wir möchten nun die Matrix  $\tilde{A}$  von  $\frac{d^2}{dx^2}$  bezüglich zweier neuer Basen

$$\begin{aligned}
 \tilde{B}_{P_3} &= \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}, \\
 \tilde{B}_{P_1} &= \{1, 1-2x\}
 \end{aligned}$$

von  $P_3$  und  $P_1$  mit Hilfe der Formel

$$\tilde{A} = SAT^{-1}$$

berechnen. Die Situation ist im kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{A \in \mathbb{R}^{2 \times 4}} & \mathbb{R}^2 \\
 & & \uparrow B_{P_3} & & \uparrow B_{P_1} \\
 T & & P_3 & \xrightarrow{\frac{d^2}{dx^2}} & P_1 & & S \\
 & & \downarrow \tilde{B}_{P_3} & & \downarrow \tilde{B}_{P_1} & & \\
 & & \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\tilde{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}} & \mathbb{R}^2 & & 
 \end{array}$$

dargestellt. Die Matrix  $T^{-1}$  haben wir schon im Beispiel zuvor ausgerechnet, sie ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir brauchen also noch die Matrix  $S$  des Basiswechsel  $B_{P_1} \rightarrow \tilde{B}_{P_1}$ . Diese Matrix bekommen wir aus:

$$\begin{aligned}
 1 &\mapsto 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1 - 2x), \\
 x &\mapsto x = \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (1 - 2x),
 \end{aligned}$$

also

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Nun haben wir alles zusammen, um die Formel (6.1) anzuwenden. Es ist

$$\begin{aligned}
 \tilde{A} = SAT^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Natürlich hätten wir bei gegebenen Basen  $\tilde{B}_{P_3}$  und  $\tilde{B}_{P_1}$  die Matrix  $\tilde{A}$  auch direkt aufstellen können. Tun wir dies noch schnell zur Kontrolle:

$$\begin{aligned}
 1'' &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1 - 2x), \\
 (x - 1)'' &= 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1 - 2x), \\
 (x - 1)^2'' &= 2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot (1 - 2x), \\
 (x - 1)^3'' &= 3(x - 1)^2' = 6(x - 1) = (-3) \cdot 1 + (-3) \cdot (1 - 2x),
 \end{aligned}$$

was wieder die Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

ergibt.

Als letztes wollen wir in diesem Abschnitt noch den Spezialfall betrachten, in welchem die lineare Abbildung  $f$  den Vektorraum  $V$  auf sich selbst abbildet.

#### Definition 6.6.4 (Endomorphismen)

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$ . Eine lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  des Vektorraums  $V$  auf sich selbst heisst **Endomorphismus**.

Die Menge der Endomorphismen eines Vektorraums  $V$  bilden selber wieder ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, welchen man mit  $\text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  bezeichnet. Die Matrix eines Endomorphismus  $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  ist immer eine  $n \times n$ -Matrix, das heisst eine **quadratische** Matrix mit gleich vielen Zeilen und Spalten.

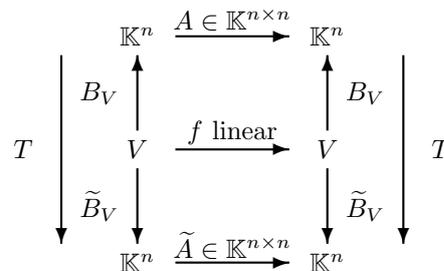
**Satz 6.6.5**

Sei  $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  und  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  die Matrix von  $f$  bezüglich einer Basis  $B_V = \{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ . Dann ist die Matrix von  $f$  bezüglich einer neuen Basis  $\tilde{B}_V = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$  gegeben durch

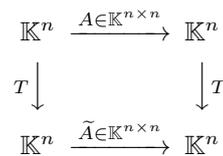
$$\tilde{A} = TAT^{-1}, \tag{6.2}$$

wobei  $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$  die Matrix des Basiswechsels von  $B_V$  nach  $\tilde{B}_V$  ist.

Der Unterschied zwischen den Formeln (6.1) und (6.2) besteht nur darin, dass wir in der Situation nur einen Vektorraum  $V$  haben und deshalb gibt es auch nur einen Basiswechsel. Das kommutative Diagramm zu dieser Situation ist



oder vereinfacht gezeichnet



**Definition 6.6.6 (Ähnliche Matrizen)**

Seien  $A, \tilde{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$  zwei quadratische Matrizen.  $A$  und  $\tilde{A}$  heißen zueinander **ähnlich**, falls eine reguläre Matrix  $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$  existiert, sodass

$$\tilde{A} = TAT^{-1}.$$

**Bemerkungen:**

- Zueinander ähnliche Matrizen beschreiben die gleiche lineare Abbildung bezüglich verschiedener Basen. Die Matrix  $T$  ist die Matrix des Basiswechsels.
- Löst man die Gleichung  $\tilde{A} = TAT^{-1}$  nach  $A$  auf, erhält man  $A = T^{-1}\tilde{A}T$ .

Für eine gegebene lineare Abbildung  $f : V \rightarrow V$  existiert häufig eine spezielle Basis, bezüglich welcher die Matrix von  $f$  diagonal ist. Der Basiswechsel führt dann auf eine Diagonalmatrix. Betrachte als Beispiel die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Wir haben dieses Beispiel schon einmal im Abschnitt 6.4 betrachtet. Die Matrix von  $f$  bezüglich der Standardbasis  $\{e_1, e_2\}$  ist gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ebenfalls haben wir gesehen, dass Kern und Bild von  $f$  gegeben sind durch die Geraden

$$\begin{aligned}
 \ker(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}, \\
 \text{im}(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}.
 \end{aligned}$$

Für dieses Beispiel bilden die beiden Basisvektoren von Kern und Bild von  $f$ , also

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ . Versuchen wir nun doch einmal, die Matrix von  $f$  bezüglich dieser Basis aufzustellen. Die Matrix des Basiswechsels erhält man aus

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die inverse Matrix von  $T$  ist

$$T^{-1} = -2 \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Natürlich enthält  $T^{-1}$  als Spalten die neuen Basisvektoren bezüglich der alten Basisvektoren (also bezüglich der Standardbasis). Bezüglich der neuen Basis wird die lineare Abbildung  $f$  durch die Matrix

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= TAT^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Matrizen  $A$  und  $\tilde{A}$  beschreiben beide die lineare Abbildung  $f$ . Worin liegt nun der Vorteil von  $\tilde{A}$  gegenüber  $A$ ? Diagonalmatrizen haben den Vorteil, dass sich beliebige Funktionen von diesen Matrizen leicht berechnen lassen. Zum Beispiel gilt

$$\tilde{A}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

oder auch

$$e^{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} e^0 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix}.$$

Genauereres dazu wird in Kapitel 7 behandelt.

## 6.7 Unitäre und orthogonale Abbildungen

In diesem Abschnitt wollen wir orthogonale und unitäre Abbildungen besprechen. Es handelt sich dabei um die Verallgemeinerung von Drehungen und Drehspiegelungen auf allgemeine Vektorräume.

### Definition 6.7.1

- i) Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum (d.h. ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt) und  $f \in \text{End}(V)$ .  $f$  heißt **orthogonal**, falls

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V.$$

Die Menge der orthogonalen Endomorphismen bezeichnet man mit  $O(V)$ . Man schreibt  $f \in O(V)$ .

- ii) Seien  $V$  ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum (d.h. ein  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt) und  $f \in \text{End}(V)$ .  $f$  heißt **unitär**, falls

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V.$$

Die Menge der unitären Endomorphismen heißt  $U(V)$ . Man schreibt daher  $f \in U(V)$ .

Es handelt sich also bei orthogonalen bzw. unitären Abbildungen um solche, die das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren nicht verändern. Somit sind diese Abbildungen winkeltreu. Sie enthalten auch keine Streckung, denn wenn das Skalarprodukt erhalten bleibt, verändert sich auch die Norm eines Vektors nicht:

$$\|f(v)\| = \sqrt{\langle f(v), f(v) \rangle} = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \|v\| \quad \forall v \in V.$$

Natürlich kennen wir das von den Drehungen und Drehspiegelungen. Zwischenwinkel zwischen Vektoren und Länge von Vektoren ändern sich nicht durch Drehungen. Man kann also orthogonale und unitäre Endomorphismen mit Fug und Recht als Verallgemeinerung der Drehungen (bzw. Drehspiegelungen) auf allgemeine (euklidische und unitäre) Vektorräume ansehen. Ohne vorhandenes Skalarprodukt macht es gar keinen Sinn, von orthogonalen oder unitären linearen Abbildungen zu sprechen. Eine weitere Eigenschaft ist:

**Satz 6.7.2**

Orthogonale und unitäre Abbildungen bilden orthonormierte Basen auf orthonormierte Basen ab.

*Beweis.* Sei  $\{e_1, \dots, e_n\}$  eine orthonormierte Basis eines euklidischen oder unitären Vektorraums und sei  $f$  orthogonal bzw. unitär. Dann ist

$$\langle f(e_i), f(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Damit ist  $\{f(e_1), \dots, f(e_n)\}$  eine orthonormierte Basis von  $V$ . □

**Satz 6.7.3**

- i) Sei  $V$  ein euklidischer Vektorraum. Die Matrix  $A$  einer orthogonalen Abbildung  $f \in O(V)$  bezüglich einer orthonormierten Basis ist orthogonal, d.h.  $A \in O(n)$ .
- ii) Sei  $V$  ein unitärer Vektorraum. Die Matrix  $A$  einer unitären Abbildung  $f \in U(V)$  bezüglich einer orthonormierten Basis ist unitär, d.h.  $A \in U(n)$ .

# Kapitel 7

## Eigenwerte und Eigenvektoren

Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen, erwiesen sich viele von ihnen als falsch.

---

Bertrand Russell

### Motivation

In vielen Fällen ist es nützlich, wenn man in einem Vektorraum eine spezielle Basis finden kann, bezüglich welcher eine gegebene lineare Abbildung (oder eine gegebene Matrix) durch eine Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

beschrieben werden kann. In dieser Basis ist dann die lineare Abbildung eine reine Streckung entlang der Basisvektoren. Diese Basis ist also eine nützliche Basis, weil man in dieser Basis die lineare Abbildung einfach beschreiben und intuitiv verstehen kann. Ausserdem lässt sich mit Diagonalmatrizen leichter rechnen. Es gilt dann zum Beispiel:

$$\det(D) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \prod_{i=1}^n \lambda_i$$
$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}, \quad \text{falls } \lambda_i \neq 0 \forall i = 1, \dots, n$$
$$D^p = \begin{pmatrix} \lambda_1^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^p & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^p \end{pmatrix}$$
$$e^D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Als Einleitung in dieses Kapitel wollen wir ein Motivationsbeispiel behandeln, in denen man die Diagonalisierung einer Matrix auf eine konkrete Problemstellung anwendet.

## Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen<sup>1</sup> sind eine berühmte Zahlenfolge, die dadurch definiert ist, dass man ausgehend von  $a_0 = 0$  und  $a_1 = 1$  jeweils die Summe bildet, um das nächste Glied in der Folge zu bekommen. Wir bekommen also die Zahlenfolge:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

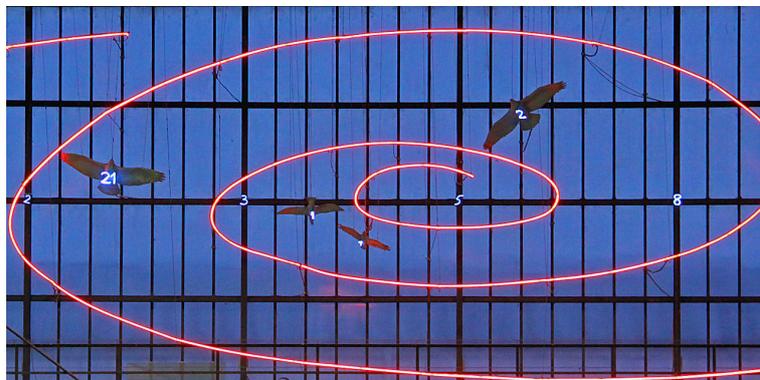


Abbildung 7.1: Fibonacci-Zahlen im Hauptbahnhof Zürich in einem Kunstwerk von Mario Merz.

Eine rekursive Definition für die Fibonacci-Folge ist also gegeben durch:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0, & a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n + a_{n-1}, & \forall n &\in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ist es möglich, aus der rekursiven Definition eine explizite Formel für das  $n$ -te Glied der Fibonacci-Folge zu bekommen, also zum Beispiel die 1000te Fibonacci-Zahl? Mit Hilfe der linearen Algebra ist das möglich. Wir können nämlich die rekursive Definition auch wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Rechnet man nämlich die rechte Seite der vorhergehenden Gleichung aus, erhalten wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} + a_n \end{pmatrix},$$

was offensichtlich konsistent mit der rekursiven Definition der Fibonacci-Zahlen ist. Wenn wir auf der rechten Seite weiterfahren, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} a_{n-3} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \dots \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

schiebt also gewissermassen ein Pärchen von zwei aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen um einen Schritt weiter. Um eine Formel für  $a_n$  zu finden, genügt es also die Potenz  $A^n$  der Matrix  $A$  berechnen zu können. Nehmen wir einmal folgendes an: es gebe einen Basiswechsel im  $\mathbb{R}^2$ , der  $A$  diagonalisiert, d.h. wir könnten eine Matrix  $T$  finden, sodass

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

wobei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  die sogenannten Eigenwerte von  $A$  sind. In diesem Fall gilt dann auch die umgekehrte Formel (Basiswechsel  $T$  rückgängig gemacht):

$$A = T^{-1}DT.$$

<sup>1</sup>Diese Zahlenreihe wurde zuerst von Leonardo Fibonacci aus Pisa im Jahr 1202 publiziert. Fibonacci wollte damit die Vermehrung einer Kaninchenpopulation beschreiben.



und somit ist die Matrix  $D$  von  $f$  bezüglich  $B_V$  gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $D$  wird also diagonal! **Um eine Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  zu diagonalisieren, muss man also eine Basis von Eigenvektoren bestimmen (falls es eine solche gibt).** Dafür müssen wir zuerst einmal lernen, wie man Eigenwerte und Eigenvektoren einer linearen Abbildung (oder einer Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ) berechnet. Und dies wollen wir nun herausfinden.

Wir starten mit der Annahme, wir hätten bereits einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$  einer Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gefunden, und wir versuchen nun den zugehörigen Eigenvektor  $x \in \mathbb{K}^n$  zu finden. Das gesuchte  $x$  muss gemäss der Definition 7.1.1 die Gleichung

$$Ax = \lambda x \quad \text{oder} \quad \lambda x - Ax = 0$$

erfüllen. Unter Ausnutzung der Distributivität kann die letzte Gleichung auch als

$$(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)x = 0 \tag{7.2}$$

geschrieben werden. Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem. Ein Vektor  $x \in \mathbb{K}^n$  ist also genau dann ein Eigenvektor von  $A$  zu einem gegebenen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ , wenn

$$x \in \ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A). \tag{7.3}$$

Die Eigenvektoren von  $A$  zu einem Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$  bilden also einen ganzen Unterraum, dessen Basis man durch Lösen des homogenen linearen Gleichungssystems (7.2) erhält. Dieser Unterraum hat eine spezielle Bezeichnung, nämlich:

**Definition 7.1.2 (Eigenraum)**

Seien  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum und  $f \in \text{End}(V)$  ein Endomorphismus mit einem bekannten Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{K}$ :

- Der Unterraum

$$E_\lambda := \ker(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

von  $V$  heisst **Eigenraum** zum Eigenwert  $\lambda$ .

- Analog: sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  die Matrix von  $f$  bezüglich einer beliebigen Basis. Dann heisst

$$E_\lambda := \ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\}$$

**Eigenraum** zum Eigenwert  $\lambda$ .

**Bemerkung:**

Der Eigenraum  $E_\lambda$  ist ganz einfach der Raum, welcher von den Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda$  aufgespannt wird.

Wenn also der Eigenwert  $\lambda$  bekannt ist, dann erhält man die Eigenvektoren zu  $\lambda$  durch Bestimmen des zugehörigen Eigenraums, bzw. durch die Berechnung des Kerns (7.3). So weit so gut, aber wie findet man überhaupt einen Eigenwert?

Im Abschnitt 3.3.5 haben wir jedoch gesehen, dass der Kern einer Matrix wie in (7.3) auch 0-dimensional werden kann, d.h. nur  $x = 0$  ist eine Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems. Der Nullvektor  $x = 0$  ist aber gemäss der Definition 7.1.1 kein Eigenvektor. Wir müssen diesen Fall also ausschliessen können. Wann ist also die Dimension des Kerns einer Matrix grösser als null? Das ist genau dann der Fall, wenn der Rang der Matrix kleiner als  $n$  ist, d.h.

$$\text{rang}(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) < n$$

Durch die Determinante ausgedrückt, ist die vorhergehende Bedingung äquivalent zu

$$\det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) = 0.$$

Diese Tatsache liefert uns die Berechnungsmethode für die Eigenwerte einer Matrix, was wir in folgendem Satz festhalten wollen:

**Satz 7.1.3**

Seien  $f : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung und  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine  $n \times n$ -Matrix.

- $\lambda \in \mathbb{K}$  ist ein Eigenwert von  $f$  genau dann, wenn

$$\det(\lambda \cdot \text{id}_V - f) = 0.$$

- $\lambda \in \mathbb{K}$  ist ein Eigenwert der Matrix  $A$  genau dann, wenn

$$\det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) = 0. \tag{7.4}$$

*Beweis.*

$$\begin{aligned} \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) = 0 &\Leftrightarrow \dim(\ker(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)) \geq 1 \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0 : (\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A)x = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda x - Ax = 0 \Leftrightarrow Ax = \lambda x \Leftrightarrow x \text{ ist Eigenvektor zum Eigenwert } \lambda. \quad \square \end{aligned}$$

Um also die Eigenwerte einer Matrix  $A$  zu bestimmen, müssen wir die Gleichung (7.4) nach  $\lambda \in \mathbb{K}$  auflösen. Doch was für ein Typ einer Gleichung ist (7.4)? Die Antwort darauf liefert der folgende Satz:

**Satz 7.1.4**

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Dann ist

$$\det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0,$$

wobei  $c_i \in \mathbb{K}$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , ein Polynom  $n$ -ten Grades.

**Korollar 7.1.5**

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $p_A(\lambda)$  zur Matrix  $A$  sind gerade die Eigenwerte von  $A$ .

Es stellt sich also heraus, dass es sich bei der rechten Seite von (7.4) um ein Polynom  $n$ -ten Grades handelt. Das Bestimmen von Eigenwerten einer Matrix läuft also auf die Berechnung von Nullstellen eines Polynoms heraus. Dieses Polynom hat in der linearen Algebra eine spezielle Bezeichnung:

**Definition 7.1.6 (Charakteristisches Polynom)**

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ . Das Polynom

$$p_A(\lambda) := \det(\lambda \mathbb{1}_n - A)$$

heißt das **charakteristische Polynom** zur Matrix  $A$ .

**Bemerkungen:**

- Aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra hat das charakteristische Polynom mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ , d.h. jede Matrix  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  hat mindestens einen Eigenwert in  $\mathbb{C}$ . Das heißt aber, dass reelle Matrizen auch imaginäre Eigenwerte besitzen können, weil eben Polynome mit reellen Koeffizienten auch imaginäre Nullstellen haben können.
- Eigenwerte können mehrfach vorkommen. Man bezeichnet dies als die (algebraische) **Vielfachheit** eines Eigenwerts. Das charakteristische Polynom kann in Linearfaktoren zerlegt werden, nämlich

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_n - A) &= \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k} = \prod_{i=1}^k (\lambda - \lambda_i)^{\nu_i} \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom  $p_A(\lambda)$  hat – wenn man die Nullstellen mit ihrer Vielfachheit zählt – insgesamt

$$\sum_{i=1}^k \nu_i = n$$

Nullstellen.

- Man beachte: auch eine reelle Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  kann imaginäre Eigenwerte haben, denn ein reelles Polynom kann auch imaginäre Nullstellen besitzen.

**Beispiele:**

Wir geben in diesen Beispielen eine Matrix vor und gesucht sind ihre Eigenwerte und Eigenvektoren.

i) Wir suchen die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir stellen zuerst die Matrix

$$\lambda \cdot \mathbb{1}_2 - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

auf. Vereinfacht gesagt, erhält man diese Matrix, indem man alle Vorzeichen in der Matrix  $A$  ändert und auf der Hauptdiagonalen jeweils ein  $\lambda$  addiert. Von dieser Matrix benötigen wir nun zuerst die Determinante, die uns das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  liefert:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 4 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - 3)(\lambda + 1). \end{aligned}$$

Die Nullstellen dieses Polynoms und somit die Eigenwerte der Matrix  $A$  lassen sich daraus direkt ablesen, nämlich

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1.$$

Wir finden also zwei verschiedene Eigenwerte, beide mit der Vielfachheit 1.

a) Eigenvektor zu  $\lambda_1$ :

$$3 \cdot \mathbb{1} - A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das homogene lineare Gleichungssystem liefert als Lösung

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 2 & 2 & \\ 2 & 2 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{array} \Rightarrow x_2 = t, x_1 = -t.$$

Der Eigenraum des Eigenraums zum Eigenwert  $\lambda_1 = 3$  wird also aufgespannt vom Eigenvektor

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Manchmal normiert man die Eigenvektoren auf Norm 1. In diesem Fall erhält man dann den Eigenvektor

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert  $\lambda_1 = 3$ .

b) Eigenvektor zu  $\lambda_2$ :

$$(-1) \cdot \mathbb{1} - A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Das homogene lineare Gleichungssystem liefert als Lösung

$$\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline -2 & 2 & \\ 2 & -2 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & -1 & \\ 0 & 0 & \end{array} \Rightarrow x_2 = t, x_1 = t.$$

Damit ist

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2 = -1$ . Auf die Norm 1 gebracht, erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ii) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies war die Matrix, die wir im Motivationsbeispiel über die Fibonacci-Zahlen erhalten haben. Wir stellen wieder zuerst die Matrix

$$\lambda \cdot \mathbb{1}_2 - A = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}$$

auf und berechnen ihre Determinante, was uns das charakteristische Polynom liefert:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$$

Die Nullstellen ergeben sich mit Hilfe der Mitternachtsformel

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Die beiden Eigenwerte der Matrix  $A$  sind also

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Wieder haben wir zwei verschiedene Eigenwerte der Vielfachheit 1 erhalten. Zu diesen beiden Eigenwerten wollen wir nun die zugehörigen Eigenvektoren bestimmen. Zu einem Eigenwert wird es immer ein solchen Eigenvektor geben.

a) Eigenvektor zu  $\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ :

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \mathbb{1} - A = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{5} + 1 & -2 \\ -2 & \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix}.$$

Das homogene lineare Gleichungssystem liefert als Lösung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ \sqrt{5} + 1 & -2 \\ -2 & \sqrt{5} - 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 2 & 1 - \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow x_2 = t, x_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}t.$$

Damit ist  $\begin{pmatrix} \sqrt{5} - 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  der Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1$ .

b) Eigenvektor zu  $\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ :

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \mathbb{1} - A = \begin{pmatrix} \frac{1 - \sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} & -2 \\ -2 & -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

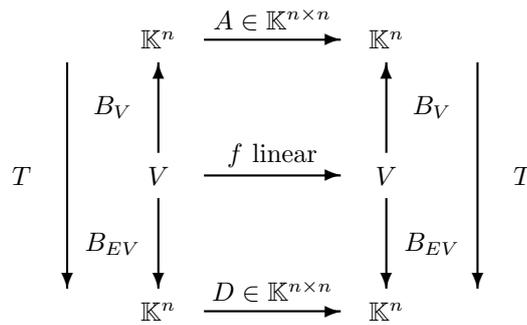
Das homogene lineare Gleichungssystem liefert als Lösung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 - \sqrt{5} & -2 \\ -2 & -1 - \sqrt{5} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ 2 & 1 + \sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow x_2 = t, x_1 = -\frac{\sqrt{5} + 1}{2}t.$$

Damit ist  $\begin{pmatrix} \sqrt{5} + 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  der Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2$ .

## 7.2 Diagonalisieren von Matrizen

Sei wiederum  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit einer beliebigen Basis  $B_V$  und  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  sei die Matrix einer linearen Abbildung  $f : V \rightarrow V$  bezüglich  $B_V$ . Wenn wir die Matrix  $A$  diagonalisieren wollen, dann müssen wir – falls möglich – aus den berechneten Eigenvektoren von  $f$  (oder  $A$ ) eine Basis  $B_{EV}$  auf und führen den Basiswechsel  $B_V \rightarrow B_{EV}$  durch. Die Matrix dieses Basiswechsels ist  $T$  und bezüglich der neuen Basis  $B_{EV}$  aus Eigenvektoren wird die Matrix  $D$  diagonal sein. Das zugehörige kommutative Diagramm sieht wie folgt aus:



Doch wie geht das konkret? Probieren wir es für die beiden letzten Beispiele aus:

**Beispiele:**

1) Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

hatten wir die Eigenvektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } \lambda_1 = 3, \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } \lambda_2 = -1,$$

gefunden. Selbstverständlich bilden diese beiden Eigenvektoren eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ . Schreibt man die Koordinaten dieser Eigenvektoren in die Spalten einer Matrix, erhält man die Inverse der Matrix des Basiswechsels, also

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix des Basiswechsels findet man durch Invertieren:

$$T = (T^{-1})^{-1} = \frac{1}{\det(T^{-1})} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

In der Tat ist dann

$$D = TAT^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte erscheinen in der Matrix  $D$  auf der Hauptdiagonalen und zwar genau in derjenigen Spalte, in der der zugehörige Eigenvektor in  $T^{-1}$  drinsteht.

2) Bei der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

waren die Eigenvektoren

$$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} : \begin{pmatrix} \sqrt{5} - 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} : \begin{pmatrix} \sqrt{5} + 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Auch diese bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^2$  und wir erhalten

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} - 1 & \sqrt{5} + 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow T = -\frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{5} - 1 \\ -2 & \sqrt{5} - 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{20} \begin{pmatrix} 2 & 1 + \sqrt{5} \\ 2 & 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix  $T$  diagonalisiert die Matrix  $A$ , denn

$$D = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

ist diagonal. Damit können wir nun das Fibonacci-Problem lösen. Das Problem war die  $n$ -te Potenz  $A^n$  der Matrix  $A$  bestimmen zu können. Wir hatten dafür die Formel

$$A^n = (T^{-1}DT) \cdot (T^{-1}DT) \cdots (T^{-1}DT) = T^{-1}D^nT$$

gefunden. Dies können wir jetzt aber ausrechnen, nämlich

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix}^n \frac{\sqrt{5}}{20} \begin{pmatrix} 2 & 1+\sqrt{5} \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 2^{n+2}} \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5})^n & 0 \\ 0 & (1-\sqrt{5})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1+\sqrt{5} \\ 2 & 1-\sqrt{5} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 2^{n+2}} \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2(1+\sqrt{5})^n & (1+\sqrt{5})^{n+1} \\ 2(1-\sqrt{5})^n & (1-\sqrt{5})^{n+1} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 2^{n+2}} \begin{pmatrix} 8(1+\sqrt{5})^{n-1} - 8(1-\sqrt{5})^{n-1} & 4(1+\sqrt{5})^n - 4(1-\sqrt{5})^n \\ 4(1+\sqrt{5})^n - 4(1-\sqrt{5})^n & 2(1+\sqrt{5})^{n+1} - 2(1-\sqrt{5})^{n+1} \end{pmatrix} = \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 2^{n+1}} \begin{pmatrix} 4(1+\sqrt{5})^{n-1} - 4(1-\sqrt{5})^{n-1} & 2(1+\sqrt{5})^n - 2(1-\sqrt{5})^n \\ 2(1+\sqrt{5})^n - 2(1-\sqrt{5})^n & (1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies ist nun die Matrix  $A^n$ . Gemäss Gleichung (7.1) ist

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 2^{n+1}} \begin{pmatrix} 4(1+\sqrt{5})^{n-1} - 4(1-\sqrt{5})^{n-1} & 2(1+\sqrt{5})^n - 2(1-\sqrt{5})^n \\ 2(1+\sqrt{5})^n - 2(1-\sqrt{5})^n & (1+\sqrt{5})^{n+1} - (1-\sqrt{5})^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um eine Formel für  $a_n$  als Funktion von  $n$  zu bekommen, benötigen wir die erste Komponente der vorhergehenden Gleichung. Diese erste Zeile liefert schliesslich (vereinfacht) die Formel

$$a_n = \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 2^n} \left[ (1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n \right].$$

Dies ist die Formel für das  $n$ -te Glied der Fibonacci-Folge!! Testen wir dies z. B. mit  $n = 7$ . Wir erhalten

$$a_7 = \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot 2^7} \left[ (1+\sqrt{5})^7 - (1-\sqrt{5})^7 \right] = 13$$

und das stimmt tatsächlich, wovon man sich mit einem Blick zurück an den Anfang dieses Kapitels überzeugt. Das 31-te Glied der Fibonacci-Folge ist übrigens

$$a_{31} = 1'346'269$$

haben Sie das gewusst?

Wir können also folgendes "Kochrezept" für das Diagonalisieren von Matrizen aufstellen:

## Vorgehen zur Diagonalisierung von Matrizen

Sei  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine  $n \times n$ -Matrix. Wie geht man vor um  $A$  zu diagonalisieren?

1) Eigenwerte berechnen. Die Eigenwerte der Matrix  $A$  sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - A) = (\lambda - \lambda_1)^{\nu_1} (\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{\nu_k}$$

Hat man die Eigenwerte berechnet, ist schon klar wie die Diagonalmatrix aussehen würde, falls die Matrix diagonalisierbar wäre. Die Diagonalmatrix enthält die Eigenwerte auf der Diagonalen und sonst ausschliesslich Nullen. Dabei kommt jeder Eigenwert  $\lambda_i$  genau  $\nu_i$  mal auf der Diagonalen vor.

2) Eigenvektoren berechnen: Für alle Eigenwerte  $\lambda_i, i = 1, \dots, k$  berechne eine Basis von

$$\ker(\lambda_i \mathbb{1} - A).$$

3) Basis von Eigenvektoren aufstellen: Hat man  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren erhalten bilden diese Eigenvektoren folglich eine Basis von  $\mathbb{K}^n$ . Dann ist die Matrix diagonalisierbar. Falls man zu wenige Eigenvektoren bekommt, ist die Matrix nicht diagonalisierbar und man muss an dieser Stelle abbrechen.

4) Basiswechsel auf die Basis von Eigenvektoren: Schreibe die  $n$  Eigenvektoren in die Spalten einer Matrix. Diese Matrix ist die Inverse  $T^{-1}$  der Matrix des Basiswechsels von der Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  zur Basis von Eigenvektoren  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Die Diagonalmatrix ergibt sich aus der Formel für den Basiswechsel

$$D = TAT^{-1}.$$

## Diagonalisierbarkeit

### Definition 7.2.1

Seien  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $f : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus und  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  eine  $n \times n$ -Matrix.

- Die Abbildung  $f$  heisst **diagonalisierbar**, falls es eine Basis von  $V$  gibt, bezüglich welcher die Matrix von  $f$  diagonal ist.
- Die Matrix  $A$  heisst **diagonalisierbar**, falls es eine reguläre Matrix  $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$  gibt (Basiswechsel), sodass  $D := TAT^{-1}$  eine Diagonalmatrix ist.

### Satz 7.2.2

Ein Endomorphismus  $f : V \rightarrow V$  ist genau dann diagonalisierbar, wenn  $V$  eine Basis aus lauter Eigenvektoren von  $f$  besitzt.

Es stellt sich nun natürlich die Frage, ob das Rezept zur Diagonalisierung einer Matrix immer funktioniert. Lässt sich also immer eine Basis aus lauter Eigenvektoren finden? Die Antwort ist leider nein, wie das folgende sehr einfache Gegenbeispiel beweist:

**Beispiel** (nicht diagonalisierbare Matrix);

Schon die simple  $2 \times 2$ -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist nicht diagonalisierbar. Wir berechnen zuerst die Eigenwerte:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1.$$

$A$  hat demnach nur einen Eigenwert der Vielfachheit 2,  $\lambda_1 = 1$ . Zu diesem doppelten Eigenwert findet man jedoch nur einen einzigen Eigenvektor:

$$\lambda_1 \mathbb{1}_2 - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ 0 & -1 & \\ 0 & 0 & \end{array} \right| \Rightarrow x_2 = 0, x_1 = t, t \in \mathbb{R}.$$

Wir bekommen also bloss einen Eigenvektor, nämlich  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Ein Eigenvektor allein ist aber zu wenig für eine Basis des  $\mathbb{R}^2$ . Folglich gibt es keine Basis von Eigenvektoren und damit ist die Matrix nicht diagonalisierbar. Das Beispiel zeigt, dass ein Problem auftreten kann, wenn man mehrfache Eigenwerte bekommt. Wenn alle Eigenwerte einfach vorkommen (Vielfachheit 1), d.h. alle verschieden sind, dann kann das nicht passieren. In diesem Fall haben nämlich alle Eigenräume die Dimension 1. Wir halten also folgendes fest:

### Satz 7.2.3

Sei  $f \in \text{End}(V)$  und  $v_1, \dots, v_k$  seien Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ , d.h.  $\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j$ . Dann sind die Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  linear unabhängig.

*Beweis.* (Induktion) Der Satz ist logischerweise richtig für  $k = 1$ , denn dann hat man einen Eigenvektor zu einem Eigenwert und ein einzelner Vektor ist linear unabhängig (Induktionsbasis). Der Satz sei also richtig  $k = r$  (Induktionsannahme). Wir betrachten nun die Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}$  zu den voneinander verschiedenen Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$  und es sei

$$\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i v_i = 0. \quad (7.5)$$

Anwendung der linearen Abbildung  $f$  auf Gleichung (7.5) liefert

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i v_i\right) &= f(0) \\ \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i f(v_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i \lambda_i v_i &= 0 \end{aligned}$$

Ebenso erhält man durch Multiplikation von Gl. (7.5) mit  $\lambda_{r+1}$ :

$$\lambda_{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i v_i = 0$$

Subtraktion der beiden letzten Gleichung liefert

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{r+1}) v_i = 0$$

der Term mit  $v_{r+1}$  ist weggefallen. Da nun aber die Vektoren  $v_1, \dots, v_r$  aufgrund der Induktionsannahme linear unabhängig sind, folgt aus der obigen Gleichung, dass

$$\alpha_i (\lambda_i - \lambda_{r+1}) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq r.$$

Weil jedoch die Eigenwerte verschieden sind, ist

$$(\lambda_i - \lambda_{r+1}) \neq 0 \quad \forall 1 \leq i \leq r$$

und somit  $\alpha_i = 0$ ,  $1 \leq i \leq r$ . Daraus folgt aber automatisch wegen Gleichung (7.5), dass auch  $\alpha_{r+1} = 0$  sein muss. Das heisst, die Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}$  sind linear unabhängig (Induktionsschritt). Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

#### Korollar 7.2.4

Sei  $V$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit  $\dim_{\mathbb{K}}(V) = n$  und  $f \in \text{End}(V)$ . Sind die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  von  $f$  alle verschieden, dann ist  $f$  diagonalisierbar.

Es ist also nun klar, dass es nur ein Problem beim Diagonalisieren geben kann, wenn Eigenwerte mehrfach vorkommen. Sind also alle Matrizen, bei denen Eigenwerte mehrfach vorkommen **nicht** diagonalisierbar? Auch auf diese Frage muss die Antwort nein sein, was aus dem folgenden Beispiel hervorgeht:

#### Beispiel:

Wir betrachten die folgende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

und versuchen diese zu diagonalisieren.

1) Eigenwerte ergeben sich aus

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1}_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -3 & 1 \\ -2 & \lambda - 1 & -1 \\ 2 & -3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind die Eigenwerte  $\lambda_1 = -2$  (einfach) und  $\lambda_2 = 4$  (doppelt).

- 2) • Der Eigenvektor zu  $\lambda_1 = -2$  ist die Basis von

$$\ker((-2) \cdot \mathbb{1}_3 - A) = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -5 \end{pmatrix},$$

also:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline -4 & -3 & 1 & \\ -2 & -3 & -1 & \\ 2 & -3 & -5 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 4 & 3 & -1 & \\ 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \Rightarrow x_3 = t, x_2 = -t, x_1 = t.$$

Somit ist der Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = -2$  gegeben durch:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Der Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda_2 = 4$  ist

$$\ker(4 \cdot \mathbb{1}_3 - A) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

also:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & -3 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \Rightarrow x_2 = s, x_3 = t, x_1 = \frac{3}{2}s - \frac{1}{2}t.$$

Die zwei Eigenvektoren sind

$$v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- 3) Wir finden also drei Eigenvektoren und diese bilden eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ . Warum? Der erste Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = -2$  ist sicher linear unabhängig zu den beiden anderen Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda_2 = 4$ , denn die Eigenwerte sind verschieden. Die beiden Eigenvektoren zum Eigenwert  $\lambda_2$  sind sowieso linear unabhängig, denn sie sind ja eine Basis des zugehörigen Eigenraums. Wir halten also fest, dass wir eine Basis von Eigenvektoren der Form

$$B_{EV} = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

gefunden haben und somit ist die Matrix  $A$  diagonalisierbar.

- 4) Die Matrix  $T$  des Basiswechsels ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

und wir bekommen

$$D = TAT^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

für die diagonalisierte Matrix.

Anhand des vorhergehenden Beispiels sieht man, dass es also Fälle gibt, bei denen auch bei mehrfach vorkommenden Eigenwerten eine Basis von Eigenvektoren gefunden werden kann. In anderen Fällen dagegen findet man zu wenige Eigenvektoren, wie in folgendem Beispiel:

**Beispiel:** Es sei die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

gegeben, welche wir diagonalisieren möchten.

1) Eigenwerte berechnen:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) = \det(\lambda \mathbb{1} - C) &= \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 4 & \lambda - 4 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 3) - (-1)4(\lambda - 3) = \\ &= (\lambda - 3)[\lambda(\lambda - 4) + 4] = (\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)^2 \end{aligned}$$

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und damit die Eigenwerte der Matrix  $C$  sind  $\lambda_1 = 3$  und  $\lambda_2 = 2$ .

2) Eigenvektoren berechnen:

a) Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = 3$ :

$$3\mathbb{1} - C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das homogene lineare Gleichungssystem liefert als Lösung

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 3 & -1 & 0 & \\ 4 & -1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{3} & -1 & 0 & \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \Rightarrow x_3 = t, x_2 = 0, x_1 = 0.$$

Damit ist  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  der Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_1 = 3$ .

b) Eigenvektor zu  $\lambda_2 = 2$ :

$$2\mathbb{1} - C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Das homogene lineare Gleichungssystem liefert als Lösung

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & -1 & 0 & \\ 4 & -2 & 0 & \\ 0 & 1 & -1 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline \boxed{2} & -1 & 0 & \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \Rightarrow x_3 = t, x_2 = t, x_1 = \frac{t}{2}.$$

Damit ist  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  der Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_2$ . Wir bekommen eine Gerade als Eigenraum, also

$$\dim(\ker(2\mathbb{1} - C)) = 1.$$

Der Eigenwert hat aber die Vielfachheit 2, kommt ja im charakteristischen Polynom doppelt vor. Es fehlt demnach ein Eigenvektor für die Konstruktion einer Basis aus Eigenvektoren. Damit kann die Matrix  $C$  nicht diagonalisiert werden.

Wenn man die beiden letzten Beispiele vergleicht, dann sieht man, was den Unterschied ausmacht. Wir bekommen im ersten Beispiel für den Eigenwert der Vielfachheit 2 einen Eigenraum mit der Dimension 2. Im vorhergehenden Beispiel liefert jedoch der Eigenwert der Vielfachheit 2 nur einen Eigenraum der Dimension 1. Ganz allgemein kann man also die Diagonalisierbarkeit von Matrizen wie folgt beschreiben:

### Satz 7.2.5

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine  $n \times n$ -Matrix mit dem charakteristischen Polynom von der Form

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{n_k},$$

das heisst  $A$  habe die Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  mit Vielfachheiten  $n_i \in \mathbb{N}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Die Matrix  $A$  ist dann und nur dann diagonalisierbar, wenn

$$\dim(E_{\lambda_i}) = n_i \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

### Bemerkung:

Eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  ist also genau dann diagonalisierbar, wenn für jeden Eigenwert  $\lambda_i$  die Dimension des zugehörigen Eigenraums mit der algebraischen Vielfachheit des Eigenwerts übereinstimmt. Dann bekommt man exakt  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren und damit eine Basis.

## 7.3 Lineare Differentialgleichungen

### 7.3.1 Lineare ODE n-ter Ordnung

Eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung (DGL)  $n$ -ter Ordnung hat die Form

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x).$$

Gesucht wird eine unbekannte Funktion  $y(x)$ , welche die DGL erfüllt. Die nicht-konstanten **Koeffizientenfunktionen**  $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$  sind gegeben. Die gegebene Funktion  $b(x)$  auf der rechten Seite heisst **Störfunktion**.

### Idee:

Wir können diese lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung in ein lineares System 1. Ordnung umschreiben. Dafür definieren wir:

$$\begin{aligned}
Y(x) &:= \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n & Y'(x) &:= \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \\
\underbrace{\begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(n)}(x) \end{pmatrix}}_{=: Y'(x) \in \mathbb{R}^n} &- \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & \dots & \dots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}}_{=: A(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}}_{=: Y(x) \in \mathbb{R}^n} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(x) \end{pmatrix}}_{=: B(x) \in \mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

Das heisst, wir erhalten das lineare DGL-System 1. Ordnung in der Form

$$Y'(x) - A(x)Y(x) = B(x).$$

Die Lösung dieses linearen Differentialgleichungssystems 1. Ordnung spaltet sich immer auf in eine Summe aus einer sogenannte **homogenen Lösung** und einer sogenannten **partikulären Lösung**

$$Y(x) = Y_H(x) + Y_P(x).$$

Die *homogene* Lösung ist die Lösung des homogenen linearen DGL-Systems <sup>4</sup>

$$Y'_H(x) = A(x)Y_H(x).$$

Wie es sich herausstellt, spannen die homogenen Lösungen einen ( $n$ -dimensionalen) Vektorraum auf. Somit ist es möglich und erstrebenswert eine Basis von diesem Lösungsraum zu finden. <sup>5</sup> Dies werden wir zumindest für einen Spezialfall weiter unten behandeln.

<sup>4</sup>Der Begriff *homogen* ist hier genau gleich zu verstehen wie bei den linearen Gleichungssystemen. Homogen bedeutet, dass die rechte Seite null ist.

<sup>5</sup>Auch das kennen wir von den linearen Gleichungssystemen: die Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems (der Kern der Matrix) ist ein Vektorraum.

Die *partikuläre* (partikulär=speziell) Lösung ist einfach eine beliebige Lösung des gesamten linearen DGL-Systems, also

$$Y_P'(x) - A(x)Y_P(x) = B(x).$$

Es gibt verschiedene Methoden, wie man eine solche partikuläre Lösung finden kann. Wir besprechen in diesem Rahmen die Methode der **Variation der Konstanten**. Für diese Methode muss man aber vorher bereits die angesprochene homogene Lösung (bzw. eine Basis dieses Lösungsraumes) berechnet haben.

### Homogene Lösung (mit Matrixexponential)

Wir wollen also im Folgenden zuerst die Lösung des homogenen DGL-Systems behandeln. Allerdings, ist es im Allgemeinen sehr schwierig, eine Basis des Lösungsraumes des homogenen DGL-Systems zu finden. Für einen speziellen Fall, in welchem alle Koeffizientenfunktionen einfach nur konstante Zahlen  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$  sind, geht das allerdings. Wir brauchen dafür das Diagonalisieren von Matrizen. Das heisst, in diesem speziellen Fall hat das lineare DGL-System 1. Ordnung hat die Struktur

$$Y'(x) = AY(x), \tag{7.6}$$

wobei die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  nun gegeben ist durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Sie besteht also nur aus gegebenen Zahlen und hängt nicht von der Funktionsvariablen  $x$  ab.

#### Behauptung:

Die Behauptung ist nun, dass die allgemeine homogene Lösung gegeben ist durch

$$Y_H(x) = \Phi(x)Y_0,$$

wobei

$$Y_0 := \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ein beliebiger Vektor und die sogenannte **Fundamentalmatrix** <sup>6</sup>  $\Phi(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben ist durch das **Matrixexponential** von  $A$ ,

$$\Phi(x) = e^{A \cdot x}.$$

Tatsächlich kann man ja formal schreiben, dass

$$\Phi'(x) = A \cdot e^{Ax} = A \cdot \Phi(x),$$

also erfüllt das homogene DGL-System (7.6). Wir müssen also, um die homogene Lösung aufstellen zu können, nur verstehen wie man "e hoch eine Matrix" berechnet.

### Matrixexponential

Was versteht man unter  $e^A$ , wenn  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?

#### Definition 7.3.1

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Dann ist das Matrix-Exponential definiert durch

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \mathbb{1}_n + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^4}{24} + \dots$$

<sup>6</sup>Eigentlich handelt es sich dabei, um eine Matrix die als Spalten die Basis des Lösungsraumes enthält.

### Berechnung von $e^A$

Wir nehmen hier an, dass  $A$  diagonalisierbar ist, d.h. es gibt eine Diagonalmatrix

$$D = TAT^{-1},$$

sodass

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

und  $T^{-1}$  enthält bekanntlich als Spalten die Basis aus Eigenvektoren.

### Partikuläre Lösung (mit Variation der Konstanten)

Folgt in Kürze.