Pre-College

Vorkurs Physik

Skript

Dumont Elisabeth (dumo)
ZHAW SCHOOL OF ENGINEERING

Verwendete Quellen:

Randall D. Knight, Physics For Scientists and Engineers, 2017, Pearson Education
Douglas C. Giancoli, Physik, 4. Auflage, 2019, Pearson Studium
David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, Halliday Physik Bachelor Edition, 2. Auflage 2013, Wiley-VCH Berlin
Fuchs H. U. (2010), The Dynamics of Heat. A Unified Approach to Thermodynamics and Heat Transfer, Springer, New York
Rainer Müller, Klassische Mechanik-Vom Weitsprung zum Marsflug, 2009, De Gruyter
Eric Mazur, Principles and Practice of Physics, Global Edition, 2015, Pearson Education

Inhalt

Kapitel 2
Kinematik

Dieses Kapitel basiert auf
Randall D. Knight, Physics For Scientists and Engineers, 2017, Pearson Education.
Douglas C. Giancoli, Physik, 4. Auflage, 2019, Pearson Studium
David Halliday, Robert Resnick, Jearl Walker, Halliday Physik Bachelor Edition, 2. Auflage 2013, Wiley-VCH Berlin
Rainer Müller, Klassische Mechanik-Vom Weitsprung zum Marsflug, 2009, De Gruyter
Eric Mazur, Principles and Practice of Physics, Global Edition, 2015, Pearson Education

Die Idee der Bewegungsdiagramme stammt aus:
Randall D. Knight, Physics For Scientists and Engineers, 2017, Pearson Education

1. Bewegungsdiagramme

1.1. Konstruktion eines Bewegungsdiagramms

Um die Bewegung eines Objekts zu analysieren, können wir dieses mit einer fest positionierten Kamera aufzeichnen, die während der gesamten Aufnahme unverändert bleibt. Wenn wir sicherstellen, dass die Aufnahme mit einer konstanten Bildrate erfolgt, bleibt das Zeitintervall zwischen den einzelnen Bildern stets gleich. Abbildung 1 links zeigt beispielhaft eine Aufnahme eines Autos, das an einem Baum vorbeifährt.

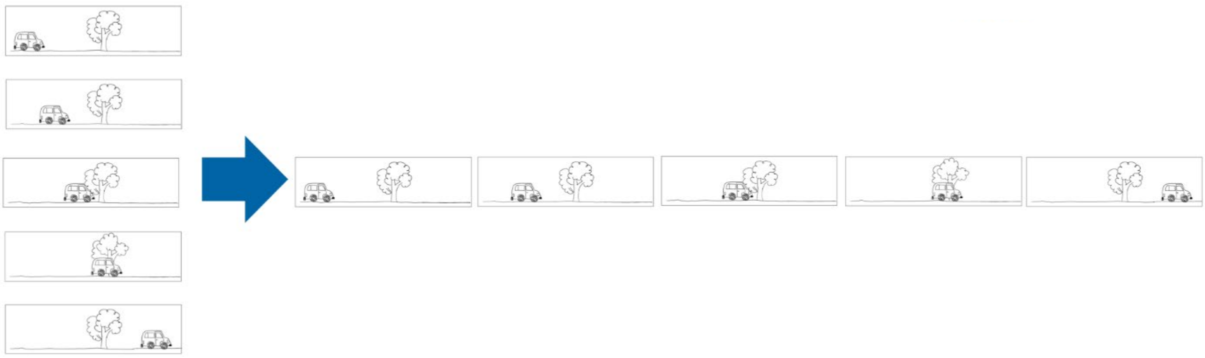


Abbildung 1 Ein Bewegungsdiagramm eines Objekts erhalten wir, indem wir einzelne Bilder, die in regelmässigen Abständen aufgenommen wurden, übereinander legen.

Zunächst zerlegen wir den Film in seine Einzelbilder und ordnen diese in einer Reihe an. Das resultierende Bild zeigt die Positionen des Autos zu gleichmässigen Zeitintervallen (siehe Abbildung 1 rechts). Ein solches Bild wird als '''Bewegungsdiagramm''' bezeichnet. Anhand des Bewegungsdiagramms können wir feststellen, ob sich ein Objekt in Ruhe befindet, wie schnell es sich bewegt, ob es an Geschwindigkeit zu- oder abnimmt und in welche Richtung es sich bewegt. Abbildung 2 zeigt weitere Beispiele für Bewegungsdiagramme:

(a) Ein Baum verharrt unbewegt.

(b) Ein Auto bewegt sich nach rechts und bremst ab.

(c) Ein Skifahrer rast einen Hang hinunter und beschleunigt.

(d) Flugbahn eines Balls.

(e) Eine Lokomotive bewegt sich nach rechts und beschleunigt.

(f) Eine Rakete startet senkrecht nach oben und beschleunigt.

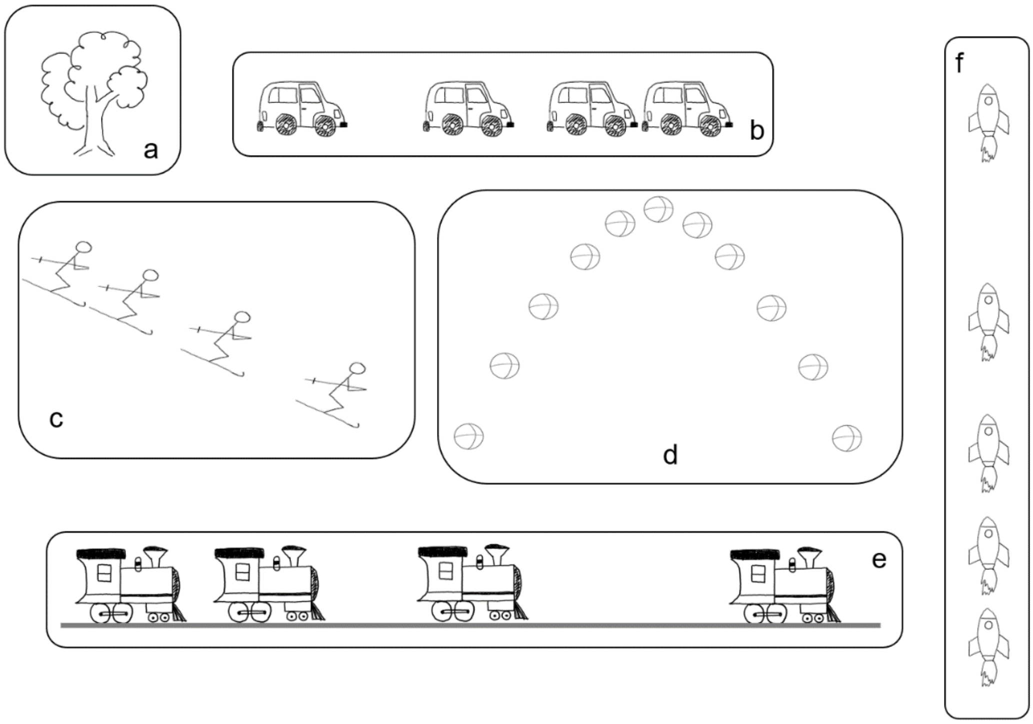


Abbildung 2 Beispiele für Bewegungsdiagramme: (a) Ein Baum steht still. (b) Ein Auto fährt nach rechts und bremst ab. (c) Ein Skifahrer fährt einen Hügel herunter und beschleunigt. (d) Wurfbahn eines Balls. (e) Eine Lokomotive fährt nach rechts und beschleunigt. (f) Eine Rakete startet vertikal nach oben und beschleunigt.

Bei vielen Bewegungen, wie denen von Bällen, Autos, Zügen oder Raketen, hängt das Bewegungsdiagramm eines Objekts in seiner Gesamtheit weniger von dessen Form oder Grösse ab. Wenn man fragt: „Wo befindet sich das Auto?“, erwartet man in der Regel keine präzise Angabe über den Standort jedes Teils des Autos. Oft genügt es, die Position des gesamten Objekts anhand der Position eines bestimmten Punktes festzulegen. Im Kontext der Mechanik wird uns der Massenmittelpunkt eines Objekts begegnen, welcher ideale Merkmale besitzt, um diese repräsentative Rolle zu übernehmen. Um die Bewegung eines Objekts zu untersuchen, können wir es auf diesen Punkt reduzieren und als Punktmasse oder "Teilchen" betrachten. Eine solche Punktmasse hat keine Ausdehnung oder Form, und es gibt keine Unterscheidung zwischen oben und unten oder vorne und hinten. Dieses Modell vereinfacht die Darstellung der Bewegung komplexer Objekte erheblich, wie Abbildung 3 zeigt:

- Ein Auto bewegt sich nach rechts und bremst. Da zwischen zwei Punkten immer das gleiche Zeitintervall vergeht, nähern sich die Punkte einander an. Das bedeutet, das Auto legt in gleicher Zeit immer kürzere Strecken zurück.

- Eine Rakete beschleunigt vertikal. Im zugehörigen vertikal gezeichneten Bewegungsdiagramm vergrössert sich der Abstand zwischen den Punkten, da die Rakete in derselben Zeit eine immer grössere Distanz überwindet.

- Ein Skifahrer, der einen Hang hinunterfährt, erzeugt ein Bewegungsdiagramm, das von oben links nach unten rechts verläuft. Die Punkte weichen immer weiter voneinander ab, da der Skifahrer beschleunigt.

- Bei einem schräg nach oben geworfenen Ball verlangsamt sich dieser während des Aufstiegs und beschleunigt beim Herabfallen erneut.

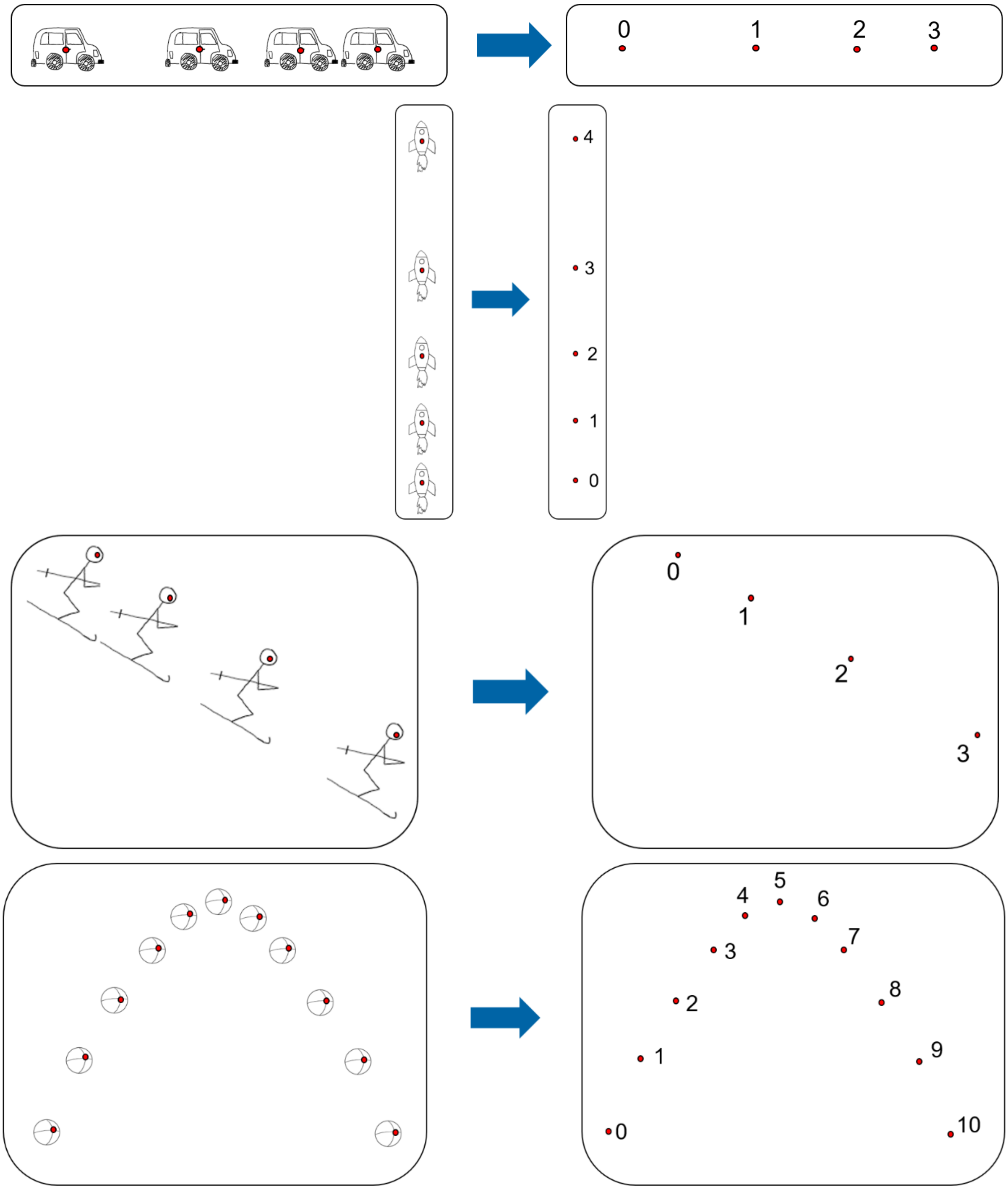


Abbildung 3 Bewegungsdiagramme im Teilchenmodell. (a) Ein Auto fährt nach rechts und bremst ab. (b) Eine Rakete beschleunigt vertikal.(c) Ein Skifahrer fährt einen Hang herunter und beschleunigt. (d) Die Wurfbahn eines Balls.

Nicht jede Bewegung kann im Teilchenmodell vollständig dargestellt werden. Wenn der Körper sich zum Beispiel um seine eigene Achse dreht, wird diese Rotation im Teilchenmodell nicht abgebildet.

1.2. Position und Zeit

Um die Bewegung eines Objekts umfassend analysieren zu können, genügen Bewegungsdiagramme allein nicht. Es ist essenziell zu wissen, "wo" sich ein Objekt zu einem "bestimmten Zeitpunkt" befindet, um seine Position zu einem bestimmten Zeitpunkt zu bestimmen.

Bevor wir die Position eines Objekts definieren können, müssen wir einen Referenzpunkt bestimmen. Die Wahl dieses Referenzpunkts ist uns überlassen, jedoch ist es sinnvoll, ihn so zu wählen, dass die nachfolgende Beschreibung der Bewegung so unkompliziert wie möglich ist. Einmal festgelegt, bezeichnen wir diesen Referenzpunkt beispielsweise mit O. Daraufhin können wir die Position eines beliebigen anderen Punktes P im Raum mithilfe seines Ortsvektors festlegen. Der Ortsvektor $\vec{r}$ eines Punktes P wird wie folgt definiert:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

also jener Vektor der ausgehend vom Referenzpunkt O zum Punkt P führt. Verändert der Punkt P seinen Ort mit der Zeit, dann wird der Ortsvektor zeitabhängig und wir schreiben $\vec{r}(t)$, siehe Abbildung 4.

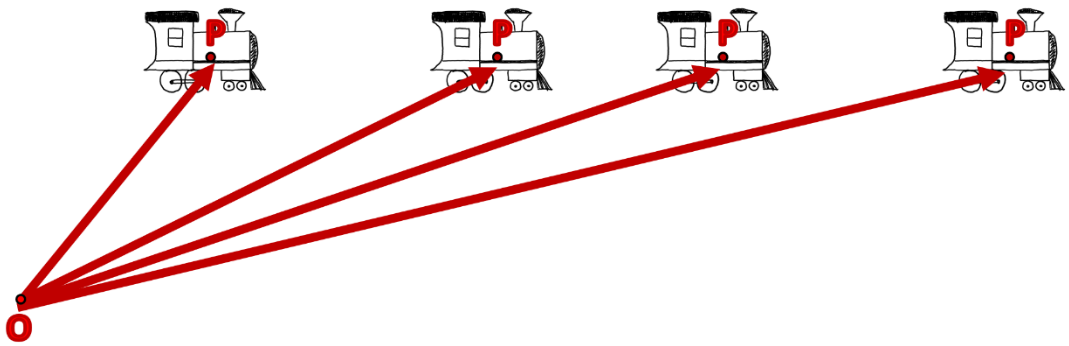


Abbildung 4 Mit Hilfe der Definition eines Referenzpunkts O kann der Ort eines Fahrzeugs, definiert durch einen fahrzeugfesten Punkt P, zu jedem beliebigen Zeitpunkt durch den Ortsvektor $\vec{r}(t)$ beschrieben werden.

Durch den Ortsvektor wird die Position von P in Bezug auf O klar bestimmt. Dies führt zur Frage, wie genau man diesen Ortsvektor in der Praxis spezifiziert. Um dies zu ermöglichen, führen wir ein Koordinatensystem ein, dessen Ursprung am zuvor festgelegten Referenzpunkt O liegt. Dabei bleibt uns die Wahl des Koordinatensystems überlassen. Eine Kreisbewegung lässt sich beispielsweise am besten in einem Polarkoordinatensystem darstellen, während für allgemeine Bewegungen häufig ein kartesisches Koordinatensystem bevorzugt wird. Selbst die Ausrichtung der Achsen in diesem System kann individuell gewählt werden.

Um die Position eines Objekts präzise zu definieren, legen wir also ein Koordinatensystem über das Bewegungsdiagramm. Dies ermöglicht uns, die Koordinaten des Teilchens in Bezug auf den Ursprung und die jeweiligen Koordinatenachsen festzustellen.

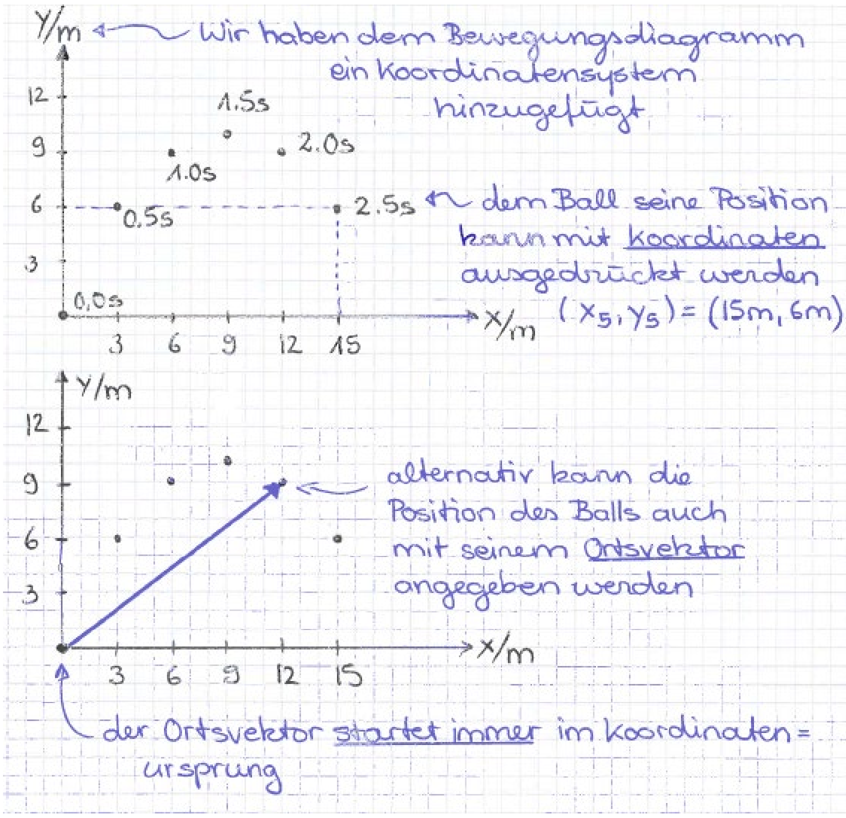


Abbildung 5 Messung der Position eines Balles zu verschiedenen Zeitpunkten mit Hilfe von Koordinatensystemen und Darstellung des Ortsvektors.

In der Abbildung 5 ist die Bewegung eines Balles in der xy-Ebene gezeigt. Die Punkte wurden im Zeitabstand von je einer halben Sekunde aufgenommen. Der Ball bewegt sich zunächst aufwärts und dann wieder abwärts. Die Position des Balls zum Zeitpunkt t=2.5 s, ausgedrückt im gewählten kartesischen Koordinatensystem beträgt (x_5,y_5)=(15 m, 6 m). In der Abbildung 5 unten ist der Ortsvektor $\vec{r}$ des Balls zum Zeitpunkt t_4=2.0 s gezeigt. Der Ortsvektor hat die Komponenten:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix}$$

1.3. Verschiebung

Betrachten wir das Beispiel in Abbildung 6: Selina befindet sich im TN, wo sie gerade in der Cafeteria etwas gegessen hat, dann muss sie rüber ins TP, wo sie anschliessend Physikunterricht hat. Eingezeichnet sind beide Ortsvektoren: Selinas Startposition durch den Ortsvektor $\vec{r_0}$ und ihre Endposition durch den Ortsvektor $\vec{r_1}$. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt links unten. Selina hat also ihre Position verändert. Diese Positionsänderung bezeichnen wir als *Verschiebung*. Die Verschiebung wird mit dem Vektor $\overrightarrow{\Delta r}$ bezeichnet.

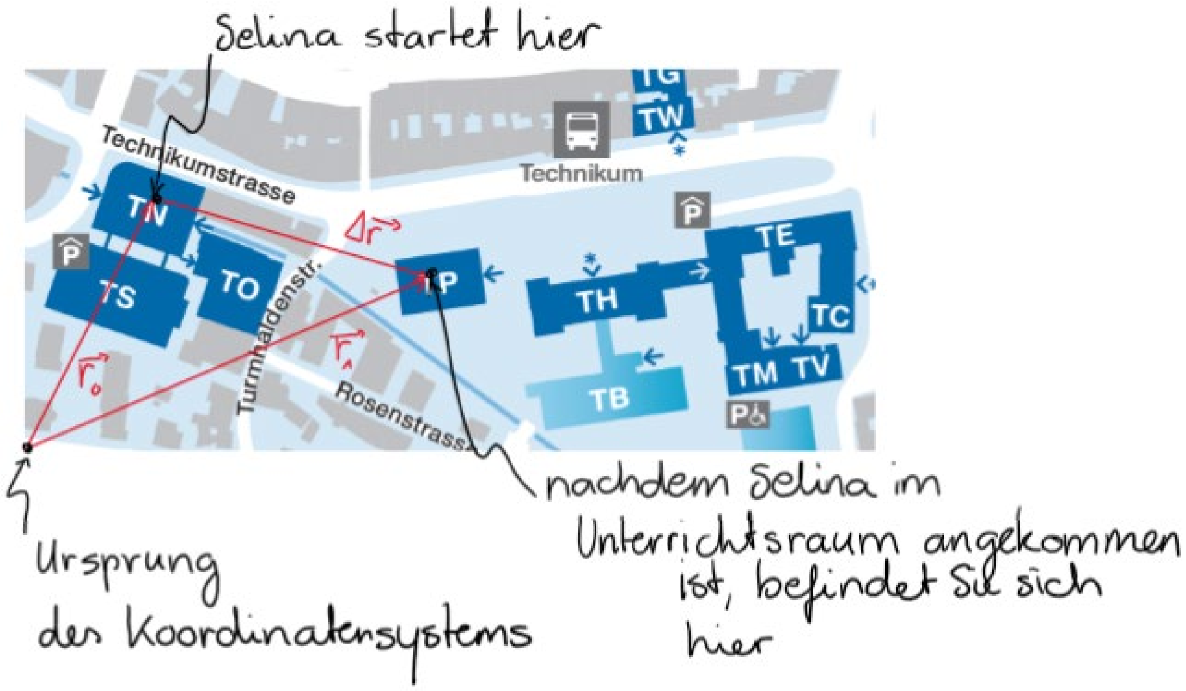


Abbildung 6 Ortsvektoren und Verschiebungsvektor. Der Anfangspunkt wird durch $\vec{r_0}$ der Endpunkt durch $\vec{r_1}$ bestimmt. Die Verschiebung seiner Position wird durch $\overrightarrow{\Delta r}$ gegeben.

Selinas Endpostion $\vec{r_1}$ erhalten wir, wenn wir zu seiner Anfangsposition $\vec{r_0}$ den Verschiebungsvektor $\overrightarrow{\Delta r}$ addieren:

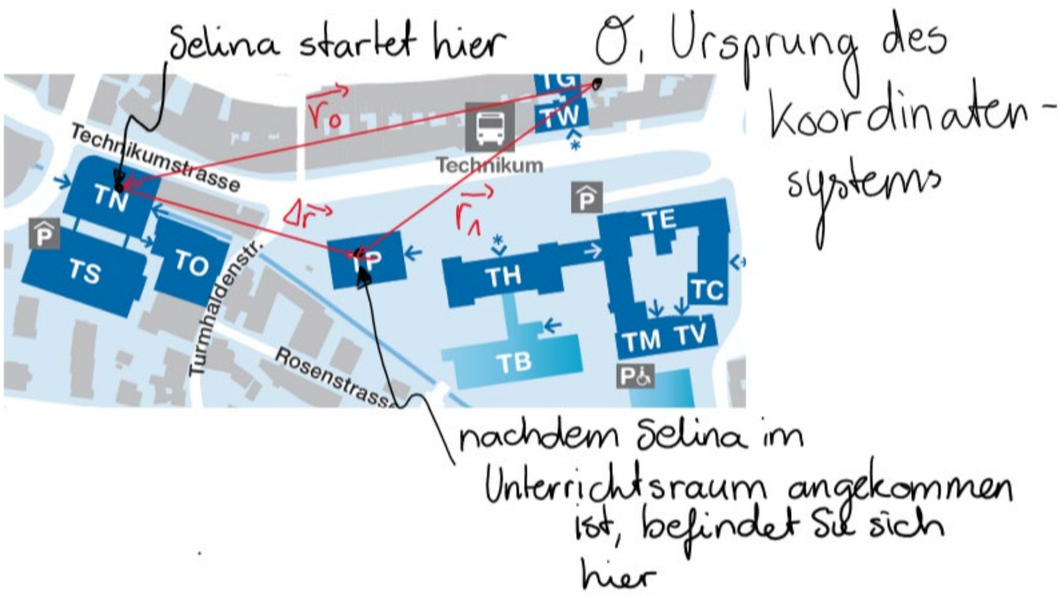
$$\vec{r_1} = \vec{r_0} + \Delta\vec{r}$$

Verändert sich der Ortsvektor zum Beispiel von $\vec{r_0}$ zu $\vec{r_1}$, dann ist die Verschiebung in Vektorschreibweise:

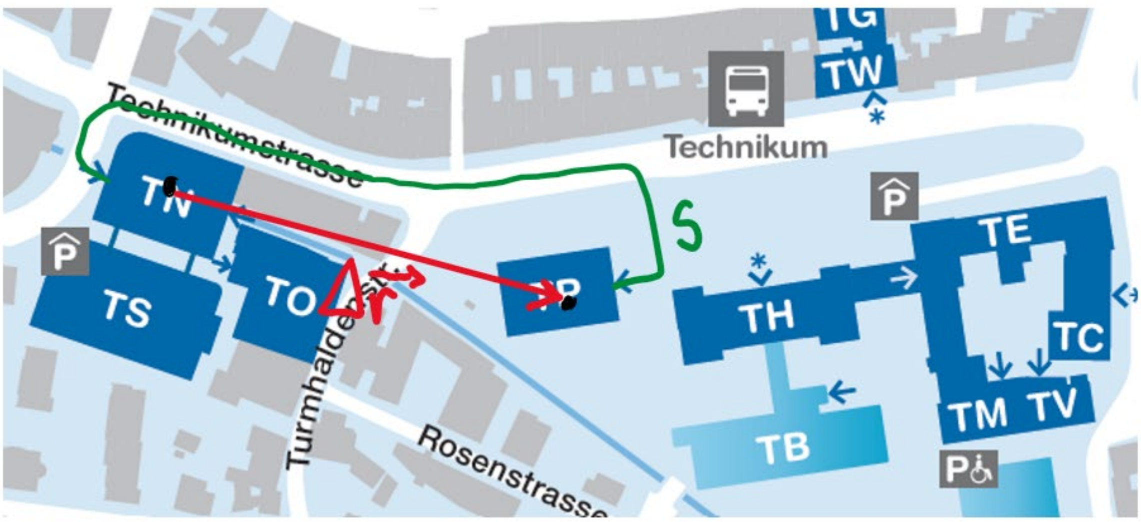
$$\Delta\vec{r} = \vec{r_1} - \vec{r_0}$$

Der Verschiebungsvektor besitzt sowohl einen Betrag als auch eine Richtung und verläuft stets vom Ausgangspunkt zum Endpunkt einer Bewegung.

Der Verschiebungsvektor ist unabhängig vom gewählten Ursprung, wie das in der nächsten Abbildung gezeigt wird:



Der Verschiebungsvektor zeigt immer vom Start der Bewegung zum Endpunkt der Bewegung. Er entspricht nicht dem Weg, den Selina zurückgelegt hat (hier in Grün eingezeichnet und mit s bezeichnet):



Jetzt zeichnen wir alle Verschiebungsvektoren in unsere Bewegungsdiagramme ein. Abbildung 7 illustriert, wie die Verschiebungsvektoren die einzelnen Punkte des Bewegungsdiagramms miteinander verknüpfen. Die Ortsvektoren sind in dieser Darstellung nicht abgebildet, für unsere Zwecke sind sie auch nicht notwendig. Aus Abbildung 7 wird zudem ersichtlich, dass die Länge der Verschiebungsvektoren zunimmt, wenn ein Objekt beschleunigt – wie im Fall der Rakete in (a) – und abnimmt, wenn es abbremst, wie beim Auto (b) dargestellt.

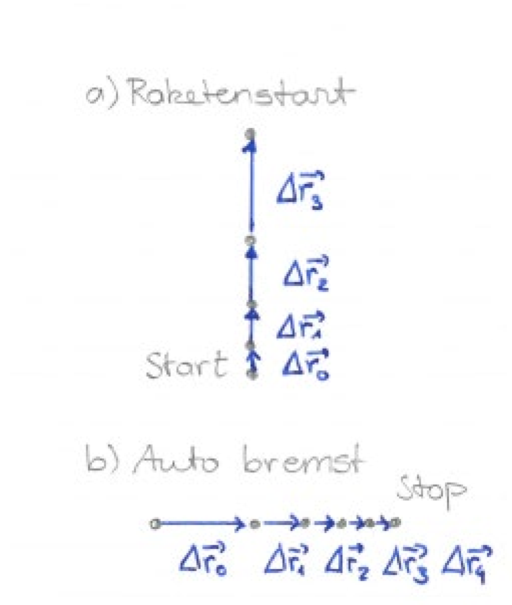


Abbildung 7 Bewegungsdiagramme mit Verschiebungsvektoren.

1.4 Geschwindigkeit

Eine physikalische Grösse, mit der wir quantifizieren können, wie schnell oder wie langsam sich ein Objekt bewegt, ist die *Durchschnittsgeschwindigkeit* oder *mittlere Geschwindigkeit* $\vec{v}_{\text{gem}}$ («gem» steht hier für «gemittelt»). Wenn ein Körper in einem Zeitintervall Δt eine Verschiebung $\overrightarrow{\Delta r}$ durchläuft, dann ist seine Durchschnittgeschwindigkeit $\vec{v}_{\text{gem}}$ definiert als:

$$\vec{v}_{\text{gem}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

Die Richtung von $\vec{v}_{\text{gem}}$ ist dieselbe, wie jene der Verschiebung $\overrightarrow{\Delta r}$, $\vec{v}_{\text{gem}}$ zeigt also immer in Bewegungsrichtung.

Es ist wichtig festzuhalten, dass die mittlere Geschwindigkeit als Vektor definiert ist, also eine Länge und eine Richtung hat. Die Länge, oder anders gesagt, der Betrag des Vektors entspricht dem, was man umgangssprachlich als «Geschwindigkeit» bezeichnet und zum Beispiel in «km/h» ausdrückt. In der deutschen Sprache fällt es schwer zu unterscheiden ob nun mit «Geschwindigkeit» der Vektor oder der Betrag des Vektors gemeint ist. Im Englischen ist dies einfacher: mit «velocity» wird der Geschwindigkeitsvektor und mit «speed» dessen Betrag bezeichnet.

In der Abbildung 8 sind Verschiebungs- und Geschwindigkeitsvektoren eines Objekts, das sich von links nach rechts bewegt, und eines anderen Objekts, das sich von unten nach oben bewegt, aufgetragen.

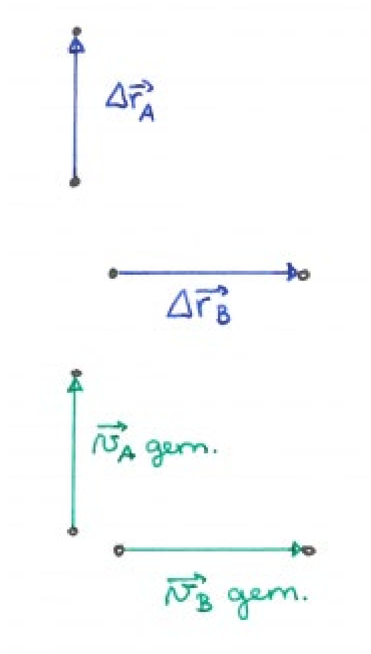


Abbildung 8 Verschiebungs- und Geschwindigkeitsvektoren eines Objekts, das sich von links nach rechts bewegt und eines Objekts das sich von unten nach oben bewegt.

Die Abbildung 9 zeigt das Bewegungsdiagramm von Hase und Schildkröte, die ein Wettrennen veranstalten. Das Zeitintervall zwischen den Punkten wurde als konstant $\Delta t = 1\ s$ gewählt: die Geschwindigkeits- und die Verschiebungsvektoren sind dann identisch. Zur Übersicht zeichnen wir nur die Geschwindigkeitsvektoren.

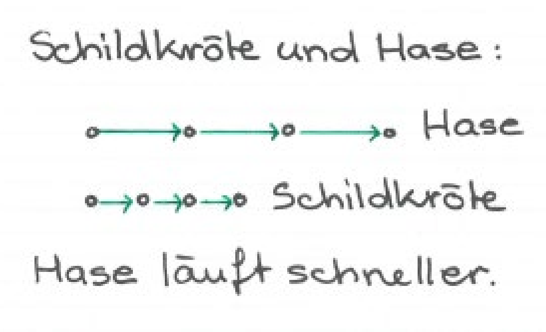


Abbildung 9 Der Hase rennt schneller als die Schildkröte, deshalb sind seine Geschwindigkeitsvektoren länger. Das Zeitintervall zwischen den Punkten ist konstant als $\Delta t = 1\ s$ gewählt, weshalb Verschiebungs- und Geschwindigkeitsvektoren identisch sind. zur Übersicht sind nur die Geschwindigkeitsvektoren eingezeichnet.

In der in Abbildung 9 gezeigten Situation ist der Hase schneller als die Schildkröte. Ausserdem bleibt die Länge der Vektoren konstant: die beiden Tiere bewegen sich mit konstanter mittlerer Geschwindigkeit.

Anders im Beispiel in Abbildung 10: ein Auto, das einen Berg hinauffährt und dabei immer schneller wird. Die Länge seines Geschwindigkeitsvektors wird immer grösser.

Abbildung 10 Bewegungsdiagramm eines Autos, das einen Berg hinauffährt und dabei immer schneller wird. Die Länge des Geschwindigkeitsvektors nimmt zu.

1.4. Beschleunigung

Bisher haben wir die Position und die Geschwindigkeit kennengelernt. Jetzt bewegen sich aber nicht alle Objekte mit konstanter Geschwindigkeit und wir müssen noch einen Weg finden, die Bewegung von solchen Objekten zu beschreiben die ihre Geschwindigkeit verändern, das heisst

1) die entweder schneller oder langsamer werden
2) oder aber auch ihre Bewegungsrichtung verändern.

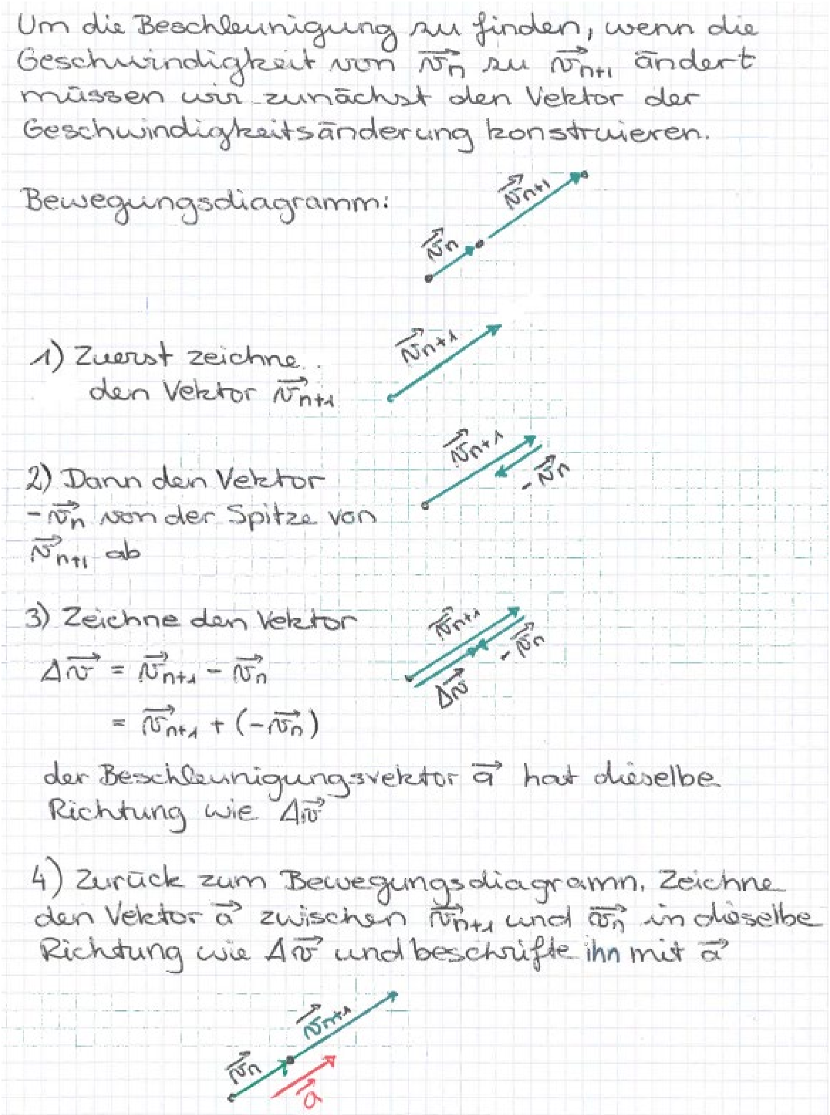
Achtung! Der Geschwindigkeitsvektor kann sowohl Betrag als auch Richtung ändern. Beides bewirkt eine Veränderung der Geschwindigkeit eines Objekts. Im alltäglichen Sprachgebrauch assoziiert man mit dem Ausdruck «Beschleunigung» meist nur eine Änderung des Betrags der Geschwindigkeit, was physikalisch nicht korrekt ist. Fahren Sie zum Beispiel mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag durch eine Kurve, dann werden Sie sehr wohl beschleunigt.

Eine Grösse, die aussagt, ob und wie sich die Geschwindigkeit eines Objekts verändert ist die *Durchschnittsbeschleunigung* oder *mittlere Beschleunigung* $\vec{a}_{\text{gem}}$. Wenn ein Körper in einem Zeitintervall Δt eine Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$ durchläuft, dann ist seine Durchschnittsbeschleunigung $\vec{a}_{\text{gem}}$ definiert als:

$$\vec{a}_{\text{gem}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Dies bedeutet, dass die Richtung von $\vec{a}_{\text{gem}}$ dieselbe sein muss, wie die der Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$.

Wie der Beschleunigungsvektor auf ein Bewegungsdiagramm aufgetragen werden kann, ist in Abbildung 11 gezeigt. Der Beschleunigungsvektor wird neben die Punkte aufgezeichnet, zwischen die beiden Geschwindigkeitsvektoren. Die Länge des Beschleunigungsvektors ist in den folgenden Zeichnungen nicht massstabsgetreu gezeichnet. Auf dem Bewegungsdiagramm ist vor allem die Angabe der Richtung der Beschleunigung nützlich.



Um die Beschleunigung zu finden, wenn die Geschwindigkeit von $\vec{v}_n$ zu $\vec{v}_{n+1}$ ändert müssen wir zunächst den Vektor der Geschwindigkeitsänderung konstruieren.

Bewegungsdiagramm:

1) Zuerst zeichne den Vektor $\vec{v}_{n+1}$

2) Dann den Vektor $-\vec{v}_n$ von der Spitze von $\vec{v}_{n+1}$ ab

3) Zeichne den Vektor

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_{n+1} - \vec{v}_n = \vec{v}_{n+1} + (-\vec{v}_n)$$

der Beschleunigungsvektor $\vec{a}$ hat dieselbe Richtung wie $\Delta\vec{v}$

4) Zurück zum Bewegungsdiagramm. Zeichne den Vektor $\vec{a}$ zwischen $\vec{v}_{n+1}$ und $\vec{v}_n$ in dieselbe Richtung wie $\Delta\vec{v}$ und beschrifte ihn mit $\vec{a}$

Abbildung 11 Komplettes Bewegungsdiagramm mit Beschleunigungsvektor. Die Länge des Beschleunigungsvektors ist nicht massstabsgetreu eingezeichnet. Von Nutzen ist auf dem Bewegungsdiagramm vor allem die Angabe der Richtung der Beschleunigung.

1.5. Lösungsstrategie: Ein komplettes Bewegungsdiagramm zeichnen

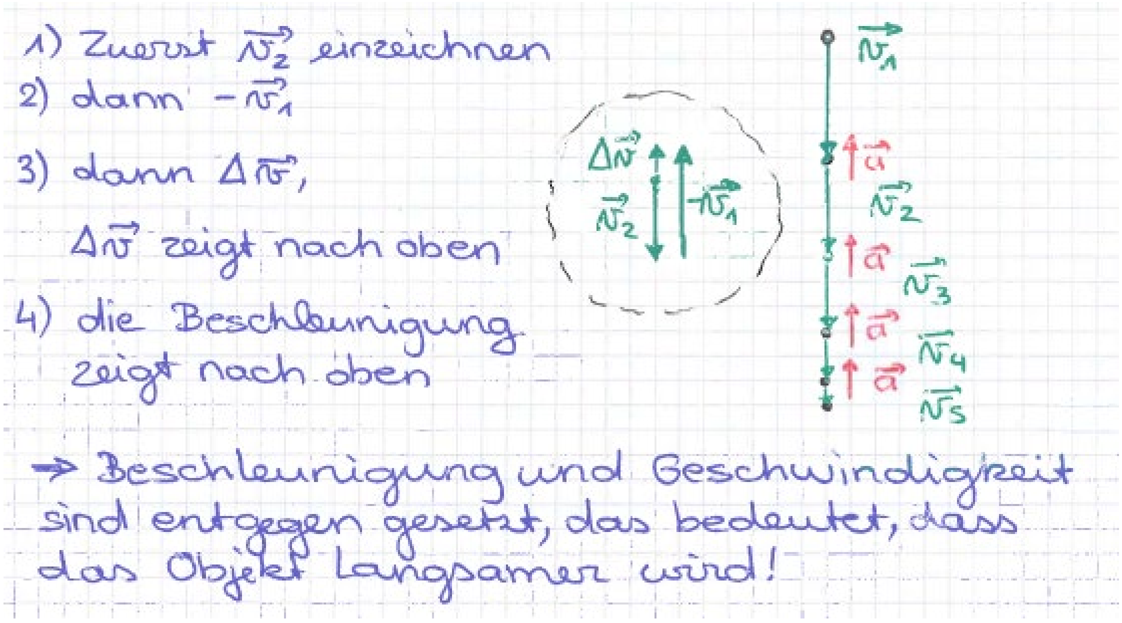
Um ein komplettes Bewegungsdiagramm zu zeichnen, führen Sie folgende Schritte aus:

1) Die Position des Objekts wird für jedes Einzelbild des Films als Punkt gekennzeichnet. Zeichnen Sie immer mindestens 6 Punkte ein. Komplizierte Bewegungen brauchen mehr Punkte.
2) Der Geschwindigkeitsvektor verbindet immer zwei Punkte im Diagramm.
3) Der Beschleunigungsvektor verbindet immer zwei Geschwindigkeitsvektoren im Diagramm. Er wird neben die beiden Geschwindigkeitsvektoren gezeichnet. Ist die Beschleunigung null, so kennzeichnen Sie diesen mit $\vec{a} = 0$.

<u>Beispiel: Raumschiff</u>

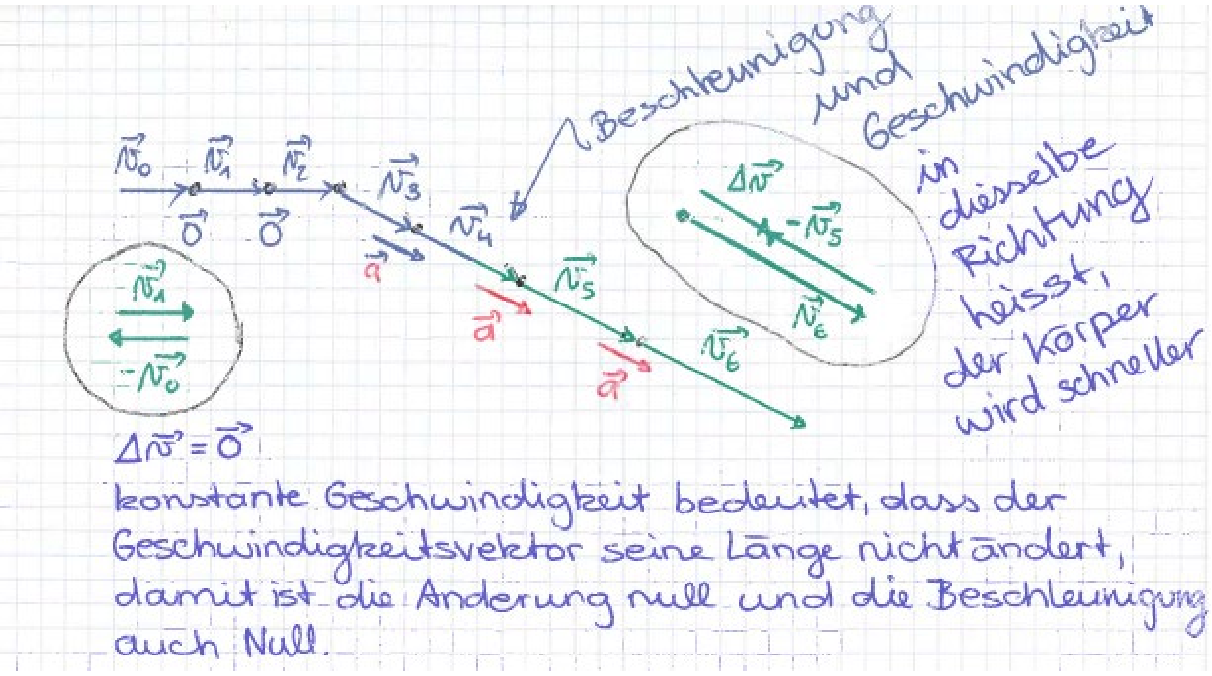
Ein Raumschiff landet auf dem Mars. Stellen Sie ein Bewegungsdiagramm des Raumschiffs in der Landephase bis zum kompletten Stillstand dar.

Lösung: Das Raumschiff bremst ab und Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor zeigen in entgegengesetzte Richtung:



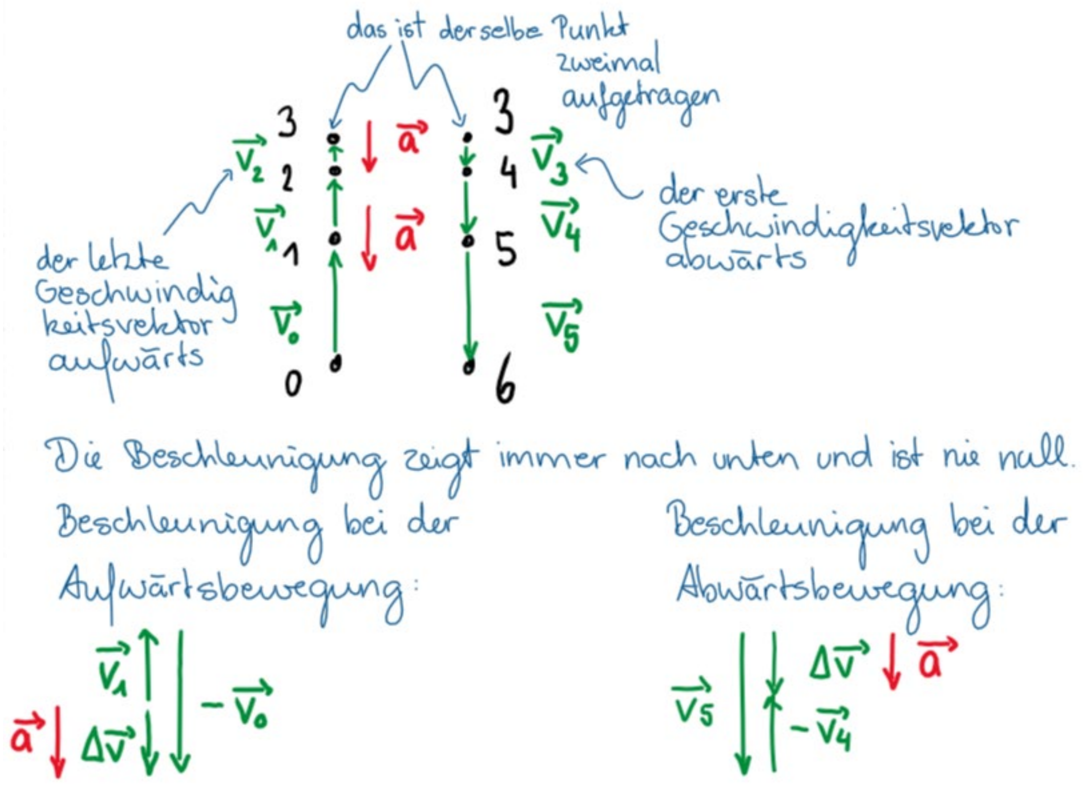
Beispiel: Skifahrer

Ein Skifahrer fährt zunächst mit konstanter Geschwindigkeit horizontal und beschleunigt, wenn er den Hügel hinunterfährt. Auf der horizontalen Strecke sind die Punkte äquidistant, denn die Geschwindigkeit ändert sich nicht. Ist die Geschwindigkeit eines Objekts konstant, so ist seine Beschleunigung null. Hat er die Abfahrt erreicht, beschleunigt der Skifahrer. Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor zeigen in dieselbe Richtung.



Beispiel: Ball

Ein Ball wird in die Höhe geworfen. Zeichnen Sie das Bewegungsdiagramm des Balls von dem Moment an, wo er die Hand verlässt bis zu dem Zeitpunkt, wo er wieder auf dem Boden auftrifft.



Es gelten folgende Regeln:

1) Bremst ein Körper ab, dann zeigen sein Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor in entgegengesetzte Richtung.
2) Beschleunigt ein Körper, dann zeigen sein Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor in dieselbe Richtung.
3) Bewegt sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit, so ist seine Beschleunigung null.

2. Kinematik in einer Dimension

In diesem Abschnitt beschränken wir uns auf Bewegung, die auf einer geraden Linie stattfinden, also in einer Dimension beschrieben werden können. Das kann ein Zug sein, der auf geraden Gleisen hin und her fährt, ein Auto auf einer geraden Strasse, eine Ameise auf einem Ast, etc. Wie wir gesehen haben können wir die Bewegung des Zuges, des Autos oder der Ameise anhand des Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektors beschreiben. In einer Dimension vereinfachen sich diese Grössen, weil sie nur entlang einer Achse zeigen und die Vektoren dadurch nur eine einzige Komponente, eben entlang dieser Achse haben. Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind dann durch die Angabe jeweils dieser einzigen Komponente x, v_x und a_x eindeutig bestimmt.

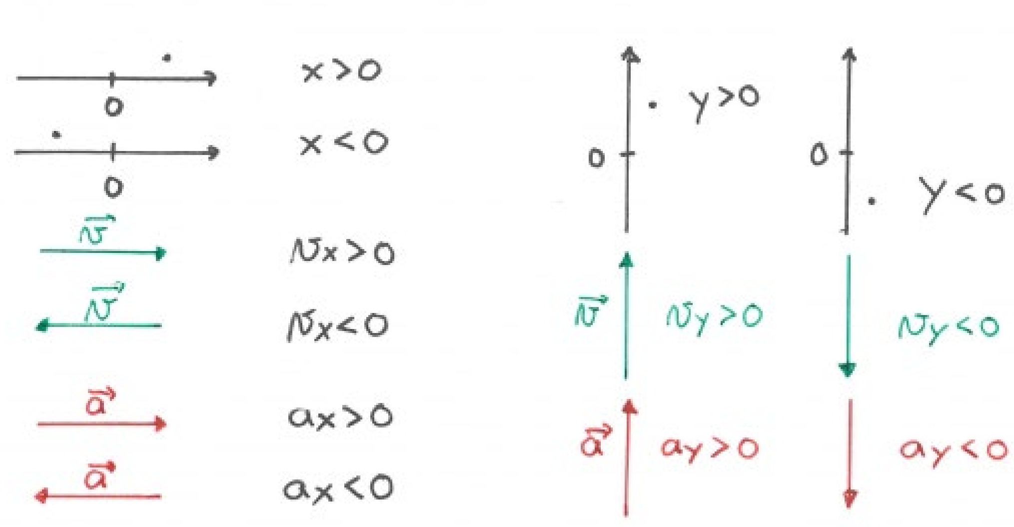


Abbildung 12 Vorzeichen von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung in einer Dimension am Beispiel von Objekten die sich linear horizontal oder vertikal bewegen.

Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung werden immer relativ zu einem Koordinatensystem quantifiziert. In Abbildung 12 sind je 2 Objekte, welche sich linear horizontal und linear vertikal bewegen, gezeigt. Zur Beschreibung der horizontalen Bewegung definieren wir eine Koordinatenachse, die wir mit x beschriften, und deren positive Richtung nach rechts zeigt. Für die vertikale Bewegung definieren wir eine mit y beschriftete Achse, die vertikal nach oben zeigt. Die Wahl der Beschriftung und der positiven Bezugsrichtung dieser Achsen sind dabei rein willkürlich.

Positive x-Werte stehen dann für eine Position rechts des Ursprungs, negative für eine Position links davon. Einer positiver y-Wert bedeutet, der Körper befindet sich oberhalb des Ursprungs auf der y-Achse, negative dass er sich unterhalb des Ursprungs befindet.

Positive Geschwindigkeiten beschreiben im ersten Fall eine Bewegung nach rechts, im zweiten Fall eine Bewegung nach oben. Eine negative Geschwindigkeit bedeutet, dass sich der Körper nach links oder nach unten bewegt.

Im Fall der Beschleunigung muss man aufpassen! Hier kommt es auf das relative Vorzeichen von Beschleunigung und Geschwindigkeit an. Sind beide, Geschwindigkeit und Beschleunigung, positiv oder beide negativ, so wird der Geschwindigkeitsvektor immer länger, der Körper wird immer schneller. Haben Geschwindigkeit und Beschleunigung entgegengesetzte Vorzeichen, so nimmt der Betrag der Geschwindigkeit ab, der Körper wird langsamer.

2.1. Ort-Zeit-Diagramm

Betrachten wir das Bewegungsdiagramm in Abbildung 13. Eine Person geht auf einer geraden Strasse vorwärts, bremst ab und geht dann wieder schneller weiter.

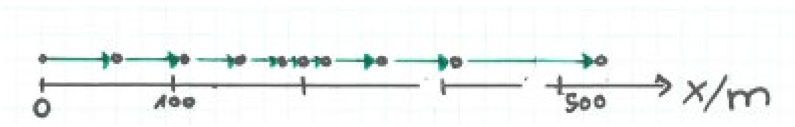


Abbildung 13 Bewegungsdiagramm einer Person, die geradeaus geht, langsamer wird und dann wieder schneller weitergeht.

Die Darstellung dieser Bewegung als Bewegungsdiagramm ist anschaulich, ist aber weniger geeignet, um die Bewegung quantitativ zu analysieren. Eine dazu besser geeignete Darstellungsweise ist ein *Ort-Zeit-Diagramm*. Stellen Sie sich vor, dass Sie zu jeder Minute die Position der Person relativ zum Startpunkt messen und diese Werte dann tabellieren. Dann tragen Sie die Position, die wir mit x bezeichnen, als Funktion der Zeit t in einem Diagramm auf. «Als Funktion der Zeit» bedeutet, dass die Position des Objekts auf der Ordinate und die Zeit auf der Abszisse aufgetragen wird, siehe Abbildung 14.

Zeit/min	Position/m
0	0
1	60
2	120
3	180
4	200
5	220
6	240
7	340
8	440
9	540

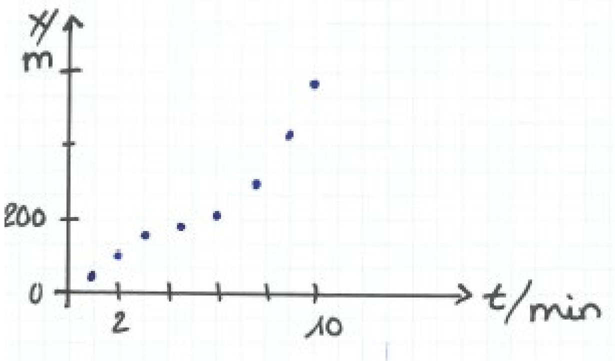


Abbildung 14 Ort-Zeit-Diagramm einer Person, die geradeaus geht, langsamer wird und wieder weitergeht.]]

Auf diesem Weg erhalten Sie eine Näherung für den Graphen der Funktion x(t) die umso besser wird, je enger die Messpunkte aneinander liegen.

2.2. Gleichförmige Bewegung

Wenn Sie mit konstanter Geschwindigkeit von 100 km/h fahren, dann bedeutet das, dass Sie in der ersten Stunde 100 km zurücklegen und in der zweiten Stunde 100 km zurücklegen, usw. Die 100 km sind hier nicht Ihre Position x, sondern die Verschiebung Δx. Das Zeitintervall Δt während dessen Sie sich um Δx verschieben ist gleich einer Stunde.

Eine Bewegung auf einer geraden Strecke mit konstanter Geschwindigkeit nennt man gleichförmige Bewegung. In Abbildung 15 ist das Bewegungsdiagramm und das Ort-Zeit-Diagramm für diese Bewegung gezeigt. Im Bewegungsdiagramm haben alle Punkte denselben Abstand. Das Ort-Zeit-Diagramm besteht aus einer Geraden. Eine gleichförmige Bewegung wird im Ort-Zeit-Diagramm immer durch eine Gerade abgebildet. Die Steigung der Geraden ist die mittlere Geschwindigkeit, oder die Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \leftrightarrow \text{Steigung der Geraden im Ort-Zeit-Diagramm}$$

Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit konstant und ändert sich mit der Zeit nie.

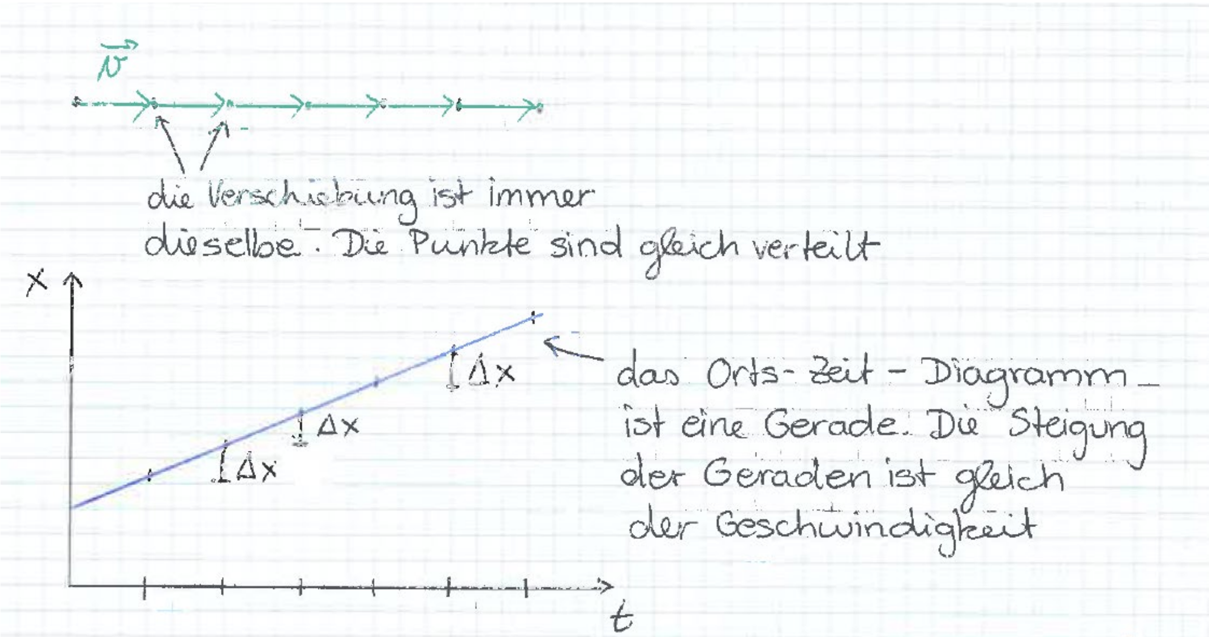


Abbildung 15 Bewegungsdiagramm und Ort-Zeit-Diagramm einer gleichförmigen Bewegung.

2.2.1. Interpretation eines Ort-Zeit-Diagramms

Allgemein kann man Folgendes aus einem Ort-Zeit-Diagramm herauslesen:

1) Steilere Kurven bedeuten eine höhere, flachere Kurven eine niedrigere Geschwindigkeit.
2) Eine negative Steigung bedeutet, dass der Körper eine negative Geschwindigkeit hat, d.h. der Körper bewegt sich entgegen der Achsenrichtung (normalerweise nach links).
3) Die Steigung der Kurve ist gleich dem Quotienten der Verschiebung und des Zeitintervalls $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, nicht einfach die Koordinaten $\frac{x}{t}$ dividieren!

2.2.2. Mathematische Beschreibung der gleichförmigen Bewegung

In Abbildung 16 ist das Ort-Zeit-Diagramm für ein Objekt gezeigt, das sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Achse x bewegt. Das Objekt hat zum Zeitpunkt t=0 die Position x_o passiert. Es handelt sich um eine Gerade mit Achsenabschnitt x_o. Die Geschwindigkeit des Objekts ist gegeben durch die Steigung der Kurve:

$$v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Wenn wir diese Gleichung auflösen nach x_2 erhalten wir eine Rechenregel, mit der wir die Position eines Objekts zu einem beliebigen Zeitpunkt t_2 mit Hilfe der Geschwindigkeit und seiner Position zu einem früheren Zeitpunkt t_1 bestimmen können:

$$\Leftrightarrow v_{\text{gem}}(t_2 - t_1) = x_2 - x_1$$

$$\Leftrightarrow v_{\text{gem}}(t_2 - t_1) + x_1 = x_2$$

Mit dieser Gleichung können Sie praktisch alle Rechenaufgaben zur gleichförmigen Bewegung lösen:

$$x_2 = x(t_2) = v_{\text{gem}}(t_2 - t_1) + x(t_1) = v_{\text{gem}}(t_2 - t_1) + x_1$$

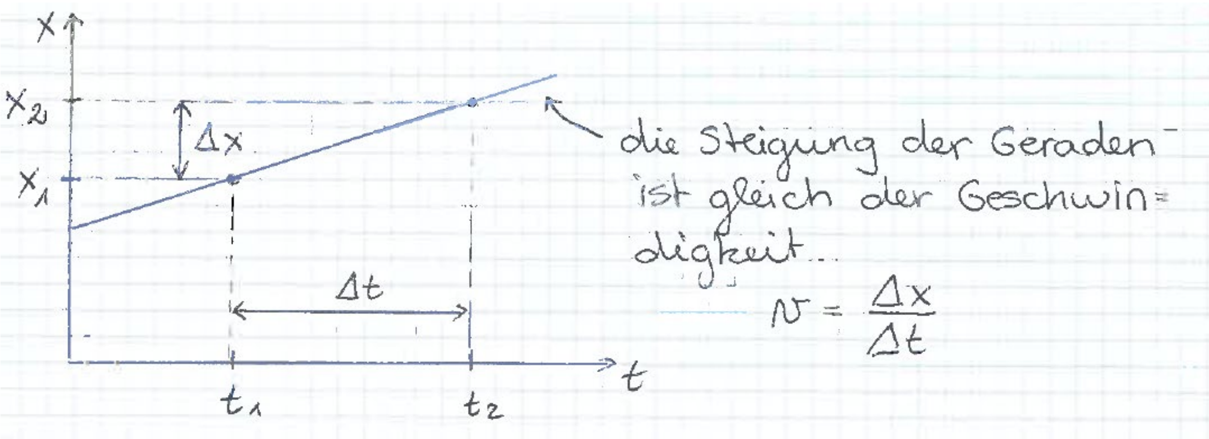


Abbildung 16 Ort-Zeit-Diagramm eines Objekts, das sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Zum ZEitpunkt t=0 befand sich das Objekt bei xo.

<u>Beispielaufgabe zur gleichförmigen Bewegung</u>

Ein Vogel fliegt mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h. Wie lange braucht er für 75 km?

<u>Lösung:</u>

Machen Sie eine Skizze und tragen Sie alle Werte ein, die gegeben sind. Kennzeichnen Sie auch die Unbekannten, so können Sie auch besser entscheiden, welche Gleichungen Sie zur Lösung der Aufgabe benutzen.

$\longrightarrow v = 15 km/h$

$t_1 = 0\ h$ $\qquad$ $t_2 = ?$

$x_1 = 0\ km$ $\qquad$ $x_2 = 75\ km$

Gleichung umformen nach t

$$x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1)$$

$$t_2 = \frac{x_2 - x_1}{v} + t_1 = \frac{75 km - 0 km}{15 \frac{km}{h}} + 0 = 5.0\ h$$

Welche Durchschnittsgeschwindigkeit muss Ihr Auto fahren, um in 3.2 h 280 km zurückzulegen?

$\longrightarrow v = ?$

$t_1 = 0$ $\qquad$ $t_2 = 3{,}2h$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2 = 280 km$

Durchschnittsgeschwindigkeit, Gleichung nach v umstellen

$$x_2 = x_1 + v(t_2 - t_1)$$

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{280 km - 0 km}{3{,}2h - 0} = 87{,}5 \frac{km}{h}$$

2.3. Momentane Geschwindigkeit

In Abbildung 17 ist das Bewegungsdiagramm und das Ort-Zeit-Diagramm eines Flugzeugs gezeigt, das zum Zeitpunkt t=0 bei x=0 startet. Im Bewegungsdiagramm sehen wir, dass der Abstand zwischen den Punkten zunimmt, und das zeigt uns, dass das Flugzeug immer schneller wird, also beschleunigt.

Wir können die mittlere Geschwindigkeit des Flugzeugs zwischen zwei Punkten bestimmen, indem wir die Steigung der Gerade die durch diese beiden Punkte geht bestimmen. Das ist in Abbildung 17 gemacht. An dem Graph erkennt man, dass die mittlere Geschwindigkeit in diesem Fall keine Aussagekraft hat. Die Gerade weicht stark von der wirklichen Ort-Zeit-Kurve ab. Auch der Pilot beobachtet am Tachometer, dass die Geschwindigkeit ständig zunimmt.

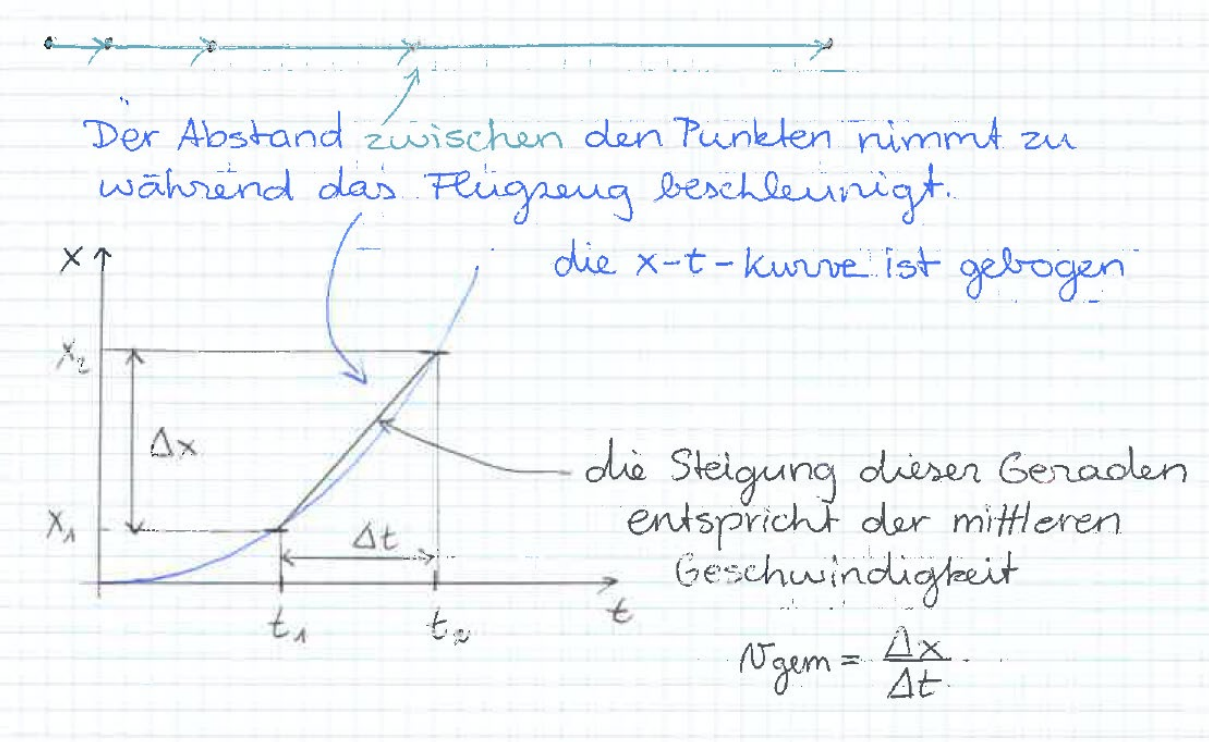


Abbildung 17 Bewegungsdiagramm und Ort-Zeit-Diagramm eines Flugzeugs, dass im Punkt x=0 bei t=0 startet und dann beschleunigt.

Das Tachometer zeigt die *momentane Geschwindigkeit* an. Die momentane Geschwindigkeit ist die Geschwindigkeit eines Objekts zu einem bestimmten Zeitpunkt. Wir haben gelernt, dass die momentane Geschwindigkeit die Rate ist, mit der sich die Position eines Objekts ändert, oder anders ausgedrückt die Änderungsrate der Ort-Zeit-Funktion.

2.3.1. Bewegungs- und Ort-Zeit-Diagramme

In der Abbildung 18 ist links das Bewegungsdiagramm des Flugzeugs aus Abbildung 17 noch einmal gezeigt. Wir wollen jetzt die Geschwindigkeit des Flugzeugs am Punkt 2, das heisst zum Zeitpunkt t2 bestimmen, wenn das Flugzeug sich am Ort x2 befindet. Wir können aber wie oben gezeigt, nicht einfach eine Gerade durch zwei Punkte ziehen und die Steigung bestimmen.

Aber nehmen wir an, dass wir eine Aufnahme mit einer high speed Kamera machen würden und dann in den Bereich um den Punkt 2 hineinzoomen würden, dann würden wir den Graph in der Mitte von Abbildung 18 erhalten. Wenn man so weit hineinzoomt, dann ist der Geschwindigkeitsvektor im Bewegungsdiagramm praktisch konstant und die Ort-Zeit-Kurve ist dann fast eine Gerade. In der Vergrösserung sieht die Bewegung um den Punkt 2 wie eine gleichförmige Bewegung aus. Wenn das Flugzeug ab dem Zeitpunkt t_2 mit dieser Geschwindigkeit weiterfliegen würde, dann wäre sein Ort-Zeit-Diagramm wieder eine Gerade.

Das heisst, dass wir in der Vergrösserung im mittleren Graphen von Abbildung 18 die Durchschnittsgeschwindigkeit wie bei einer gleichförmigen Bewegung bestimmen können:

$$v_{\text{gem}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

wobei Δt jetzt ein unendlich kleines Zeitintervall um den Zeitpunkt t_2 herum ist. Wenn wir also das Zeitintervall um den Zeitpunkt t_2 unendlich klein wählen, dann wird die mittlere Geschwindigkeit in diesem winzigen Intervall eine recht gute Näherung für die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t_2.

Mathematisch ausgedrückt heisst «das Zeitintervall Δt unendlich klein wählen»: Das Zeitintervall Δt gegen Null streben lassen. Mathematisch bedeutet $\Delta x/\Delta t$ berechnen, wenn das Zeitintervall Δt gegen Null strebt, die die Funktion $\Delta x/\Delta t$ nach der Zeit t ableiten oder auch «die Änderungsrate von x(t) bestimmen». Die Ableitung wird mit einem Punkt auf dem x notiert oder man schreibt dx/dt. Mathematisch schreibt sich also der oben beschriebene Sachverhalt:

$$v(t_2) = \dot{x}(t_2) = \frac{dx}{dt}(t_2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Das ist nur eine Notation! Es bedeutet nur, dass man den Quotienten $\Delta x/\Delta t$ auswertet, während man das Zeitintervall Δt unendlich klein wählt.

Graphisch bedeutet dies, dass man die Steigung der Tangenten an den x(t)-Graph zum Zeitpunkt t_2 bestimmt. Wenn man nämlich jetzt wieder herauszoomt, dann erhält man den Graphen rechts in Abbildung 18 und die Gerade die wir vorher durch die Punkte im mittleren Graph gelegt hatten wird jetzt zu einer Tangenten im Ort-Zeit-Diagramm.

Wir merken uns also: Die momentane Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist die Steigung der Tangenten an das Ort-Zeit-Diagramm zum Zeitpunkt t.

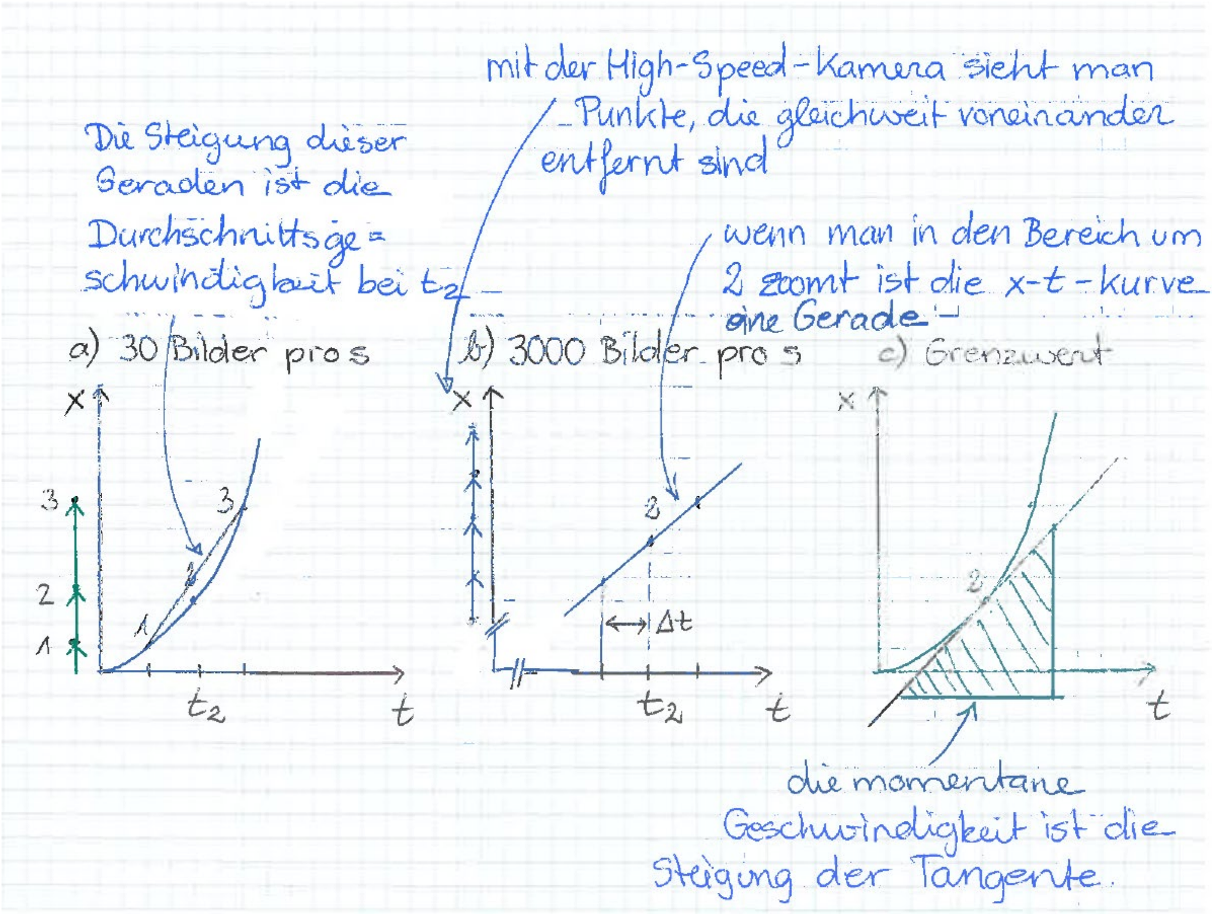


Abbildung 18 Bewegungsdiagramm und Ort-Zeit-Diagramm eines Flugzeugs. Links: normale Aufnahme; Mitte: Zoom um den Punkt t2 herum und Konstruktion der mittleren Geschwindigkeit in einem unendlich kleinen Intervall um t2 herum; Rechts: wieder herausgezoomt mit der Tangente am Punkt 2.

2.4. Bestimmung der Position aus der Geschwindigkeit

Wir wissen jetzt, wie wir aus dem Ort-Zeit-Diagramm die momentane Geschwindigkeit herauslesen können. Aber manchmal misst man auch die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit, siehe Abbildung 19. Deshalb ist es ebenso nützlich, zu wissen, wie man aus dem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm die Position eines Objekts herausfindet.

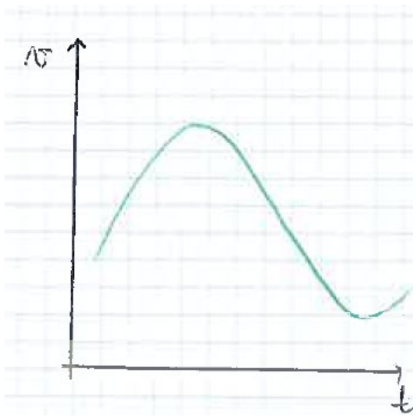


Abbildung 19 Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines sich bewegenden Objekts.

Bei der gleichförmigen Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit wissen wir, wie das geht. Wir können die Position eines Objektes, das sich mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt und das sich zum Zeitpunkt t=0 am Punkt x_o befindet, bestimmen mit:

$$x(t) = v_{\text{gem}}t + x_o$$

Oder die Verschiebung des Objekts mit:

$$\Delta x = v_{\text{gem}}\Delta t$$

Weil wir wissen, wie wir mit gleichförmiger Bewegung umgehen können, approximieren wir doch einfach die Geschwindigkeit-Zeit-Kurve aus der Abbildung 19 durch eine Treppenfunktion, die über sehr kleine Abschnitte hinweg konstant ist, siehe Abbildung 20.

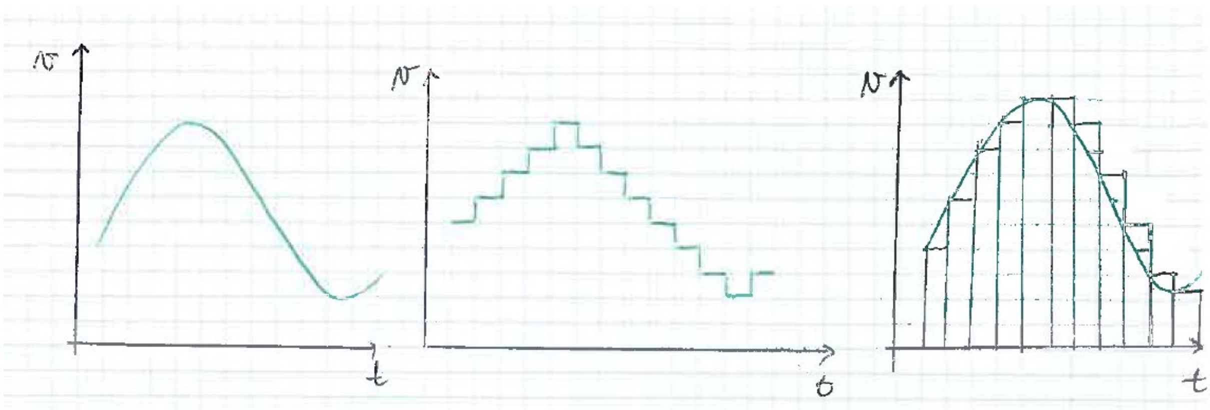


Abbildung 20 Geschwindigkeit-Zeitdiagramm eines sich bewegenden Objektes (links). Die Geschwindigkeitsfunktion v(t) wird mit einer Treppenfunktion approximiert (Mitte). Die Position wird mit Hilfe von sehr kleinen Rechteckflächen bestimmt. (rechts).

Die Stufen dieser Treppenfunktion sind alle gleich breit, die erstrecken sich immer über dasselbe Zeitintervall Δt. Während der Zeit Δt ist die Geschwindigkeit konstant. Sie hat immer denselben Wert, wie am Anfang des Intervalls, zum Zeitpunkt t_i. Wir schreiben diesen Wert $v(t_i)$. Da die

Geschwindigkeit in dem Intervall Δt konstant ist, können wir die Verschiebung des Objekts in diesem Intervall mit wie bei der gleichförmigen Bewegung berechnen:

$$\Delta x_i = v(t_i)\Delta t$$

Das können wir für jede Stufe in der Abbildung 20 machen. Zum Beispiel für den ersten Abschnitt:

$$\Delta x_1 = v(t_1)\Delta t$$

Und für den zweiten Abschnitt:

$$\Delta x_2 = v(t_2)\Delta t$$

Und den dritten Abschnitt:

$$\Delta x_3 = v(t_3)\Delta t$$

...und den i-ten Abschnitt:

$$\Delta x_i = v(t_i)\Delta t$$

usw. bis zum letzten Abschnitt:

$$\Delta x_n = v(t_n)\Delta t$$

Dann addieren wir alle diese Abschnitte und erhalten die Gesamtverschiebung über den ganzen Zeitbereich:

$$\Delta \mathrm{x} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \cdots + \Delta x_i + \cdots + \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t$$

Das Symbol $\sum_{i=1}^{n}$ bedeutet, dass wir die Summe über alle Intervalle nehmen. Es ist nur eine Abkürzung.

Das Objekt ist zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $x = x_o$ gestartet. Wir erhalten also seine Position zum Zeitpunkt t, indem wir die Gesamtverschiebung zux_o hinzuaddieren:

$$x(t) \approx x_o + \Delta \mathrm{x} = \mathrm{x_o} + \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t$$

Das Symbol ≈ bedeutet «näherungsweise», denn wir haben die Geschwindigkeit-Zeit-Kurve nur mit der Treppenfunktion angenähert! Diese Näherung ist umso besser, je schmäler die Stufen sind, d.h. umso kürzer das Zeitintervall Δt ist. Die Gleichung wird dann exakt, wenn wir das Zeitintervall Δt unendlich klein wählen, also mathematisch gegen Null gehen lassen, oder den Grenzwert bilden:

$$x(t) = \mathrm{x_o} + \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t$$

Dafür haben die Mathematikerinnen auch wieder ein spezielles Symbol:

$$x(t) = \mathrm{x_o} + \int_0^t v(\tau)d\tau$$

Das Symbol $\int_0^t v(\tau)d\tau$ nennen die Mathematikerinnen «Integral von v nach t» und es bedeutet nichts anderes als die Summe $\sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t$ über alle Stufen für eine unendlich kleine Stufenbreite Δt zu bilden.

Das tönt sehr kompliziert, ist es aber nicht. Auch hier gibt es wieder eine sehr anschauliche graphische Interpretation. Die Verschiebung über den i-ten Abschnitt $\Delta x_i = v(t_i)\Delta t$. Ist im Diagramm der Abbildung 20 ein Rechteck. Nämlich das Rechteck der Höhe $v(t_i)$ und der Breite Δt. Und die Summe $\sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t$ über alle Stufen ist die Summe aller dieser Rechteckflächen. Das heisst, wir erhalten die Position oder die Verschiebung eines Objektes, indem wir die Fläche unter der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve bilden.

$$x(t) = x_o + \text{Fläche unter } v(t)\text{-Kurve zwischen } t = 0 \text{ und } t$$

Oder die Verschiebung des Objekts mit:

$$\Delta x = \text{Fläche unter } v(t)\text{-Kurve zwischen } t = 0 \text{ und } t$$

«Halt!», werden Sie jetzt vielleicht denken «Δx_i ist doch eine Länge und keine Fläche!». Aber wir meinen auch nicht eine reale Fläche auf der Erde, sondern die Fläche die auf dem Diagramm von der Kurve $v(t_i)$ und den Zeitintervall Δt begrenzt wird. So wie wir mit Steigung der Geraden, nicht die Steigung meinen, die ein Körper in einer Landschaft hinauf oder hinabrollt, sondern die mathematische Steigung in dem Graph.

Beispielaufgabe: Verschiebung eines Rennwagens

In Abbildung 21 ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Rennwagens gezeigt, der zum Zeitpunkt t=0 s aus dem Stillstand startet. Wo befindet sich der Rennwagen bei t=3.0 s?

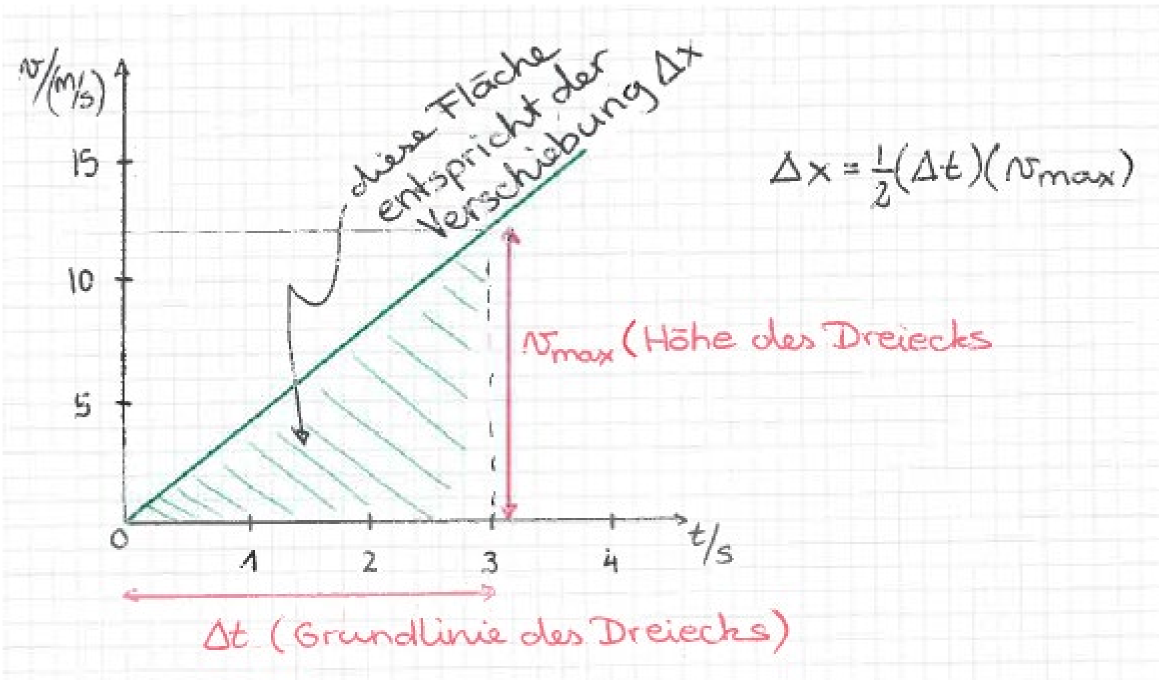


Abbildung 21 Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Rennwagens, der zum Zeitpunkt $t=0$\,s aus dem Stillstand startet.

Lösung

Um die Position des Rennwagens zum Zeitpunkt t=3.0 s zu bestimmen, müssen wir seine Verschiebung Δx bestimmen. Dies können wir tun, indem wir die Fläche zwischen der $v(t)$-Kurve und der Zeitachse bestimmmen. Es handelt sich dabei um ein Dreieck der Höhe $v_{max} = 12.0$ m/s und der Grundlinie $\Delta t = 3$ s. Die Fläche beträgt also:

$$\Delta x = \frac{1}{2} v_{max} \Delta t = \frac{1}{2} (12.0 \text{ m/s}) (3\ s) = 18\ m$$

Wenn wir davon ausgehen, dass der Rennwagen bei t=0 s am Koordinatenursprung x=0 m gestartet ist, dann befindet sich zum Zeitpunkt t=3.0 s bei x=18 m.

Beispielaufgabe: mit Umkehrpunkt

In Abbildung 22 ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Körpers gezeigt, der bei t=0 bei x=30 m startet und sich zunächst nach rechts bewegt, dann umkehrt und sich wieder nach links bewegt. Unten ist auch das Bewegungsdiagramm für diesen Ablauf gezeichnet.

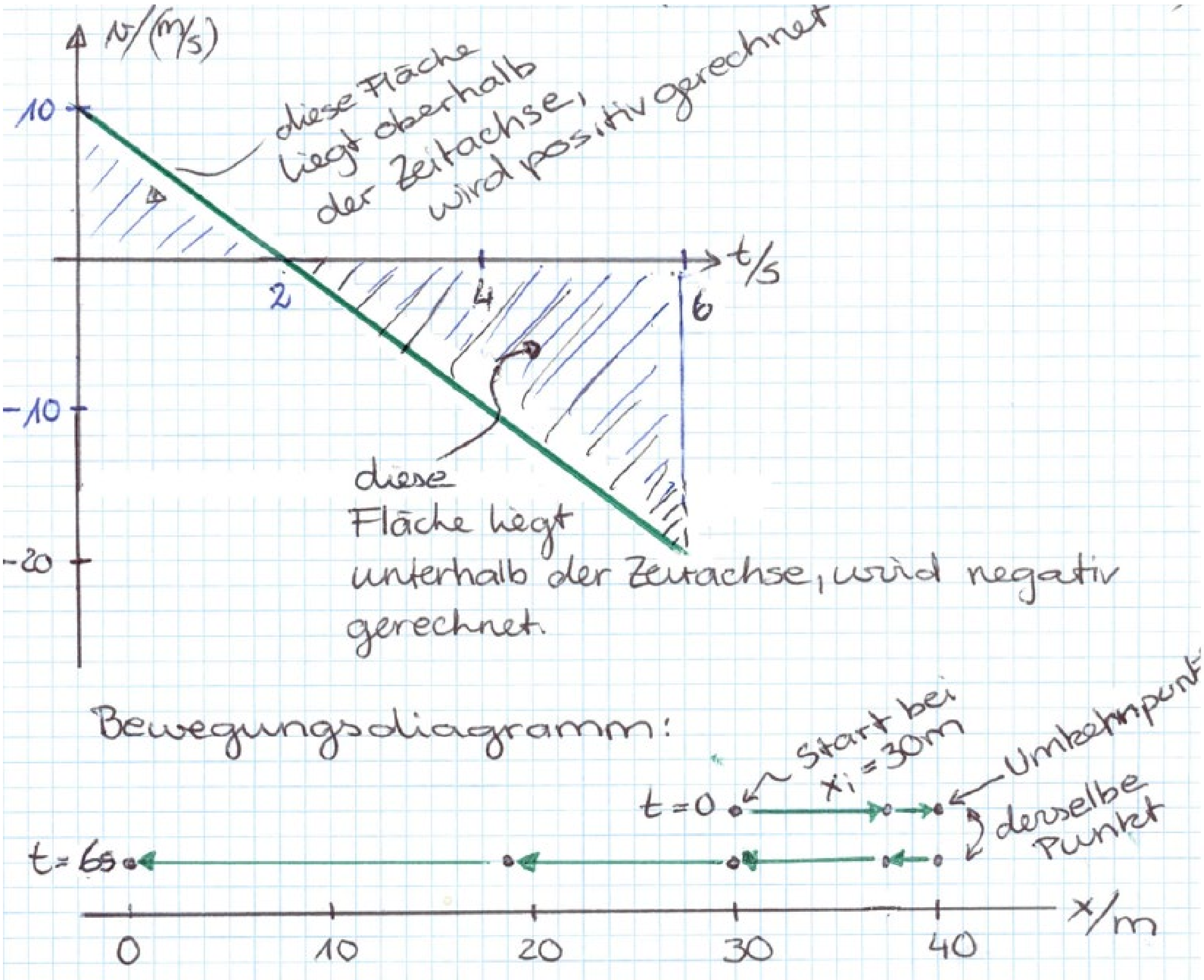


Abbildung 22 Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Körpers der bei t=0 bei x=30 m startet und sich zunächst nach rechts bewegt, dann umkehrt und sich nach links bewegt. Unten ist auch das Bewegungsdiagramm für diesen Ablauf gezeichnet.

1) Wo befindet sich der Umkehrpunkt des Teilchens?
2) Zu welchem Zeitpunkt erreicht das Teilchen wieder den Ursprung $x=0$\,m?
3) Zeichnen Sie ein Bewegungsdiagramm.

Lösung

1) Das Teilchen passiert den Punkt x=30 m mit einer Geschwindigkeit von v=10 m/s. Die Geschwindigkeit nimmt ab, das Teilchen wird also immer langsamer. Bei t=2 s wird seine Geschwindigkeit negativ, das heisst, das Teilchen bewegt sich ab dem Zeitpunkt in die andere Richtung. Der Umkehrpunkt befindet sich also bei t=2 s.
2) Um die Position des Teilchens zu einem bestimmten Zeitpunkt zu berechnen, müssen wir wiederum seine Verschiebung Δx bestimmen. Dies können wir tun, indem wir die Fläche zwischen der $v(t)$-Kurve und der Zeitachse bestimmmen. Zunächst bestimmen wir die Verschiebung bis zum Umkehrpunkt t=2 s:

$$\Delta x = \frac{1}{2} v_{max} \Delta t = \frac{1}{2}(10.0\ \mathrm{m/s})(2.0\ s) = 10\ m$$

Dann addieren wir diesen Weg zum Ursprung x=30 m bei t=0:

$$x(2\ s) = x(0) + \Delta x = 40\ m$$

Beim Umkehrpunkt befindet sich das Teilchen also bei x=40 m.

Um den Zeitpunkt zu bestimmen, zu dem sich das Teilchen wieder am Ursprung x=0 m befindet, müssen wir also den Zeitpunkt finden, sodass die Fläche zwischen der der $v(t)$-Kurve und der Zeitachse gleich $\Delta x = 40$ m ergibt. Das ist genau die negative Fläche zwischen 2 s und 6 s, sowie v=0 m/s am Umkehrpunkt und v=-20 m/s. Die Fläche beträgt also:

$$\Delta x = \frac{1}{2} v_{max} \Delta t = \frac{1}{2}\left(-\frac{20.0\ \mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)(4.0\ s) = -40\ m$$

Das Teilchen befindet sich also zum Zeitpunkt t=6 s am Ursprung x=0 m.

Liegt $v(t)$ unterhalb der t-Achse, so sind die Werte für $v(t)$ negativ und die Fläche erhält auch einen negativen Wert, also werden die Flächen in der Summe mit einem negativen Vorzeichen addiert.

3) Das Bewegungsdiagramm ist in Abbildung 22 aufgetragen.

2.5. Gleichmässig beschleunigte Bewegung

2.5.1. Herleitung der Gleichungen für die gleichmässig beschleunigte Bewegung

Die in diesem Abschnitt aufgeführten Gleichungen gelten nur für den Spezialfall, dass die Beschleunigung konstant ist! Lange nicht alle Bewegungen sind gleichmässig beschleunigt. Die Beschleunigung kann mit der Zeit auch zu- oder abnehmen. Die allermeisten natürlichen Phänomene laufen nicht mit konstanter Beschleunigung ab. Dies ist zum Beispiel bei Schwingungen oder bei Bewegungen, die durch den Luftwiderstand gebremst werden, der Fall.

In Abbildung 23 ist das Beschleunigung-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit und Ort-Zeit-Diagramm eines gleichmässig beschleunigten Objektes gezeigt. Im oberen Graphen ist die Beschleunigung als Funktion der Zeit gezeigt. Es ist eine horizontale Gerade, weil die Beschleunigung sich mit der Zeit nicht ändert, sondern immer konstant beim Wert a bleibt.

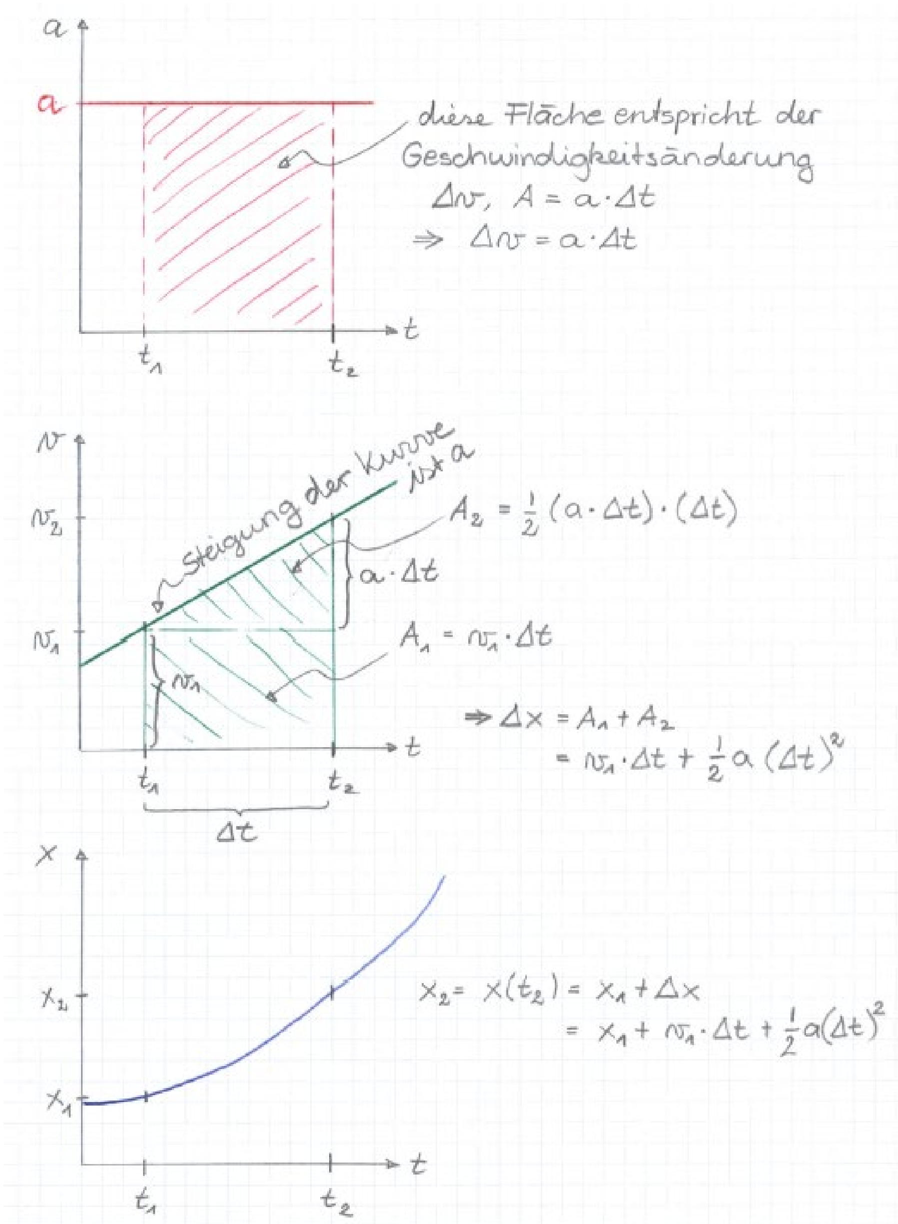


Abbildung 23 Beschleunigung-Zeit- und Geschwindigkeit-Zeit und Ort-Zeit-Diagramm eines gleichmässig beschleunigten Objektes.

Die Geschwindigkeit-Zeit und Ort-Zeit-Diagramme können wir aus den Überlegungen des vorangegangenen Abschnittes graphisch herleiten. In der Abbildung 23 oben ist die Beschleunigung des Teilchens als Funktion der Zeit gezeigt. Sie ist konstant gleich a und entspricht deshalb einer horizontalen Linie im Beschleunigung-Zeit-Diagramm. Die zwischen den Zeitpunkten $t1$ und $t2$ erreichte Geschwindigkeitsänderung erhalten wir, indem wir die Fläche zwischen der Beschleunigung-Zeit-Kurve und der Zeitachse berechnen:

$$\Delta v = a\Delta t$$

ausgeschrieben:

$$v(t_2) - v(t_1) = a(t_2 - t_1)$$

und aufgelöst nach $v(t_2)$:

$$v(t_2) = v(t_1) + a(t_2 - t_1)$$

Was das für eine Funktion ist, sieht man am besten, wenn man $t_1 = 0$ setzt und der Einfachheit halbe die Zahl 2 weglässt, also $t_2 = t$. Dann ist die Geschwindigkeit durch die Funktion gegeben:

$$v(t) = v(0) + a(t - 0) = v(0) + at$$

Wenn wir jetzt auch noch $v(0) = v_0$ notieren, dann sieht man, dass das eine Geradengleichung ergibt:

$$v(t) = v_0 + at$$

Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm ist eine Gerade mit der Steigung a und dem Achsenabschnitt v_o. Die Funktion ist in Abbildung 23 in der Mitte abgebildet.

Die Position des Objekts zum Zeitpunkt t erhalten wir, indem wir zunächst seine Verschiebung Δx bestimmen. Diese entspricht der Fläche unter der Geschwindigkeit-Zeit-Kurve, wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben. Diese Fläche besteht aus einem Dreieck A2 mit Basis Δt und Höhe $a\Delta t$ und einem Rechteck A1 mit Länge Δt und mit Breite v_1. Die totale Fläche ergibt sich dann zu:

$$\Delta x = A_1 + A_2 = [\Delta t(a\Delta t)] + [\Delta t v_1]$$

ausmultiplizieren gibt:

$$\Delta x = a\Delta t^2 + v_1\Delta t = a(t_2 - t_1)^2 + v_1(t_2 - t_1)$$

Was das für eine Funktion ist, sieht man wieder am besten, wenn man $t_1 = 0$ setzt und der Einfachheit halbe die Zahl 2 weglässt, also $t_2 = t$.

$$\Delta x = a(t - 0)^2 + v_0(t - 0)$$

Wobei wir benutzt haben, dass $v_1 = v(t_1)$ ist und mit $t_1 = 0$ zur Anfangsgeschwindigkeit wird $v_0 = v(0)$. Wir ersetzen auch noch

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x(t) - x(0) = x(t) - x_0$$

Und formen um nach $x(t)$. Dann erhalten wir die Gleichung:

$$x(t) = at^2 + v_0 t + x_0$$

Diese Funktion ist eine Parabel, die in Abbildung 23 unten gezeigt ist. Sie können diese benutzen, um die Aufgaben zu lösen, in denen die Beschleunigung konstant ist. Zusätzlich kann man noch weitere Gleichungen herleiten, die sich in bestimmten Situationen als nützlich erweisen können. Diese sind in Tabelle 1 angegeben:

Tabelle 1 Beziehungen zwischen Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Zeit bei einer gleichmässig beschleunigten Bewegung

Beschleunigung-Zeit	$a(t_0) = a(t_1) = a$ (Beschleunigung konstant)
	$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$
Geschwindigkeit-Zeit	$v_1 = v(t_1) = a(t_1 - t_0) + v_0$ (Geschwindigkeit-Zeit linear)
Ort-Zeit	$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{2}a(t_1 - t_0)^2 + v_0(t_1 - t_0) + x_0$ (Ort-Zeit quadratisch)
Geschwindigkeit-Ort	$v_1^2 - v_0^2 = 2a(x_1 - x_0)$

Beispielaufgabe: Raketenschlitten

Ein Raketenschlitten beschleunigt mit 50 m/s^2 während 5.0 s, fährt dann während 3.0 s mit konstanter Geschwindigkeit. Dann wird ein Fallschirm ausgelöst und der Schlitten bremst mit einer Beschleunigung von 3.0 m/s^2 ab bis zum vollständigen Stillstand.

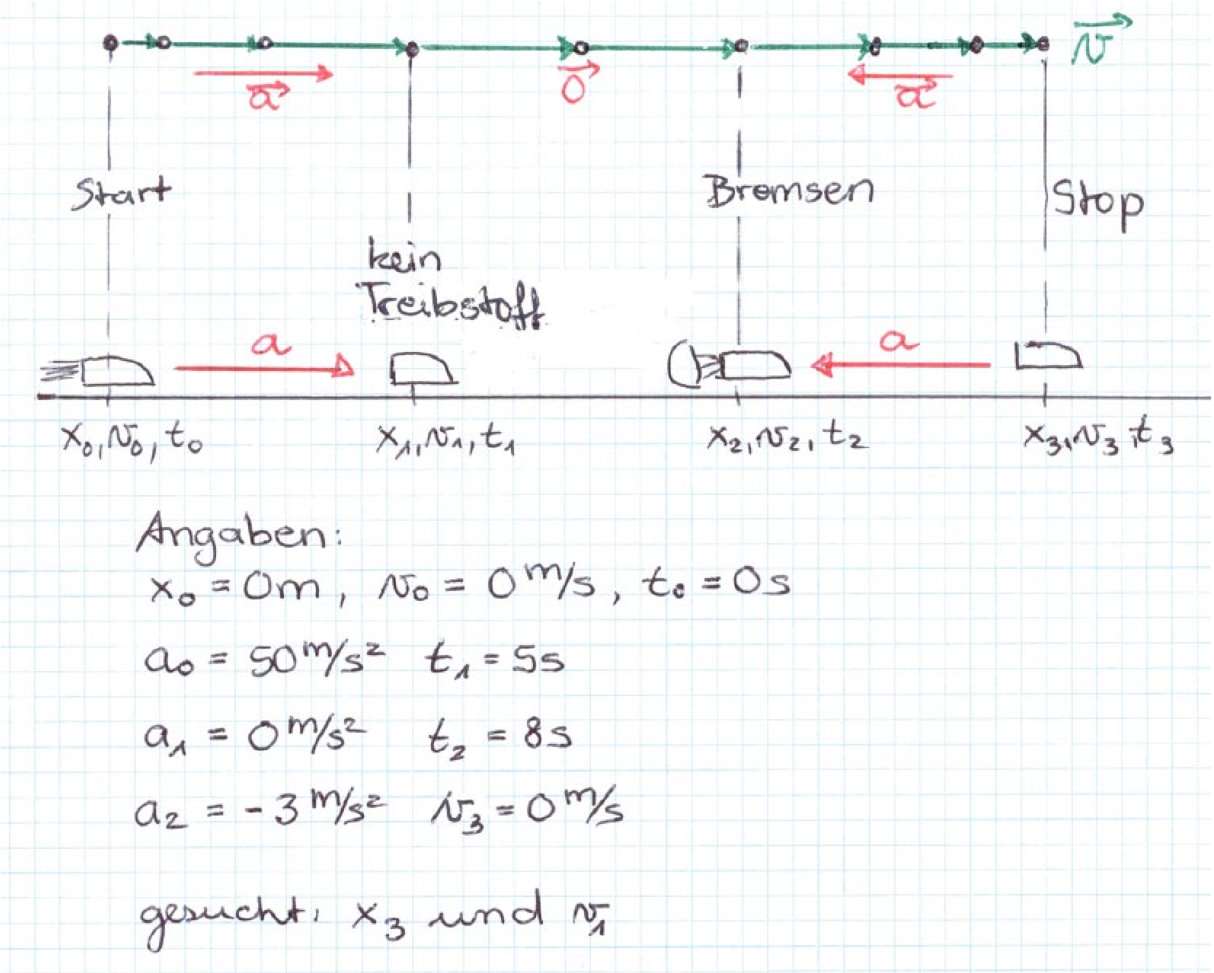


Abbildung 24 Ein Raketenschlitten beschleunigt mit 50 m/s2 während 5.0 s, fährt dann während 3.0 s mit konstanter Geschwindigkeit. Dann wird ein Fallschirm ausgelöst und der Schlitten bremst mit einer Beschleunigung von 3.0 m/s2 ab bis zum vollständigen Stillstand.

1) Bestimmen sie die Höchstgeschwindigkeit des Schlittens.

2) Bestimmen sie die totale Distanz, die der Schlitten gefahren ist.

Lösung

1) Zuerst sollten Sie unbedingt eine Skizze anfertigen und die wichtigsten Angaben aufschreiben das ist in Abbildung 24 gezeigt. Dann erst machen Sie sich an die Lösung der Aufgabe.
Die Höchstgeschwindigkeit $v_1 = v(t_1)$ zum Zeitpunkt t1 erhalten wir aus der Gleichung für die gleichmässig beschleunigte Bewegung:
$$v_1 = v_0 + a\Delta t = 0 + (50\,m/s^2)(5.0\,s) = 250\,m/s$$
Formen Sie zuerst die Gleichungen algebraisch um und setzen Sie die Zahlen erst ganz zum Schluss ein.

2) Um die totale Distanz, die der Schlitten gefahren ist zu bestimmen, müssen wir in mehreren Schritten vorgehen: zuerst bestimmen wir x1 die Position am Ende der

Beschleunigungsphase, dann bestimmen wir x2, die Position bevor der Fallschirm ausgelöst wird und dann erst die Position x3 am Ende der Bewegung. Die Position x1 am Ende der Beschleunigungsphase berechnet sich:

$$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 + x_0 = at_1^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}(50\,m/s^2)(5.0\,s)^2 = 625\,m$$

Zwischen x1 und x2 fährt der Schlitten mit konstanter Geschwindigkeit, also gilt:

$$x_2 = x(t_2) = x_1 + v_1(t_2 - t_1) = 625\,m + \left(\frac{250\,m}{s}\right)(3.0\,s) = 1375\,m$$

Wir kennen die Dauer der Bremsphase nicht. Aber kennen die Endgeschwindigkeit $v_3=0$\,m/s und können die Gleichung

$$v_3^2 - v_2^2 = 2a(x_3 - x_2)$$

Auflösen nach x_3 ergibt das:

$$x_3 = x_2 + \frac{v_3^2 - v_2^2}{2a} = 1375\,m + \frac{0 - \left(250\,\frac{m}{s}\right)^2 - v_2^2}{2(-3.0\,m/s^2)} = 12000\,m$$

2.5.2. Der freie Fall

Wenn man einen Gegenstand im Vakuum, also ohne Berücksichtigung des Luftwiderstands, nach oben oder unten wirft, wird man feststellen, dass er mit einer konstanten Rate beschleunigt wird. Diese konstante Beschleunigung ist als Gravitationsfeldstärke bekannt und wird mit dem Symbol g bezeichnet. Oft wird sie auch als Erdbeschleunigung bezeichnet. Bemerkenswert ist, dass diese Beschleunigung unabhängig von den Eigenschaften des Gegenstandes, wie seiner Masse, Dichte oder Form, ist. Sie gilt gleichermassen für alle fallenden Körper.

Der genaue Wert von $\vec{g}$ kann sich je nach geografischer Breite und Höhe über dem Meeresspiegel ändern. Auf Meereshöhe in mittleren geografischen Breiten liegt er bei 9,81 m/s^2.

Die Bewegungsgleichungen für gleichförmige Beschleunigung gelten auch für den freien Fall nahe der Erdoberfläche, vorausgesetzt die Bewegung verläuft geradlinig nach oben oder unten und man vernachlässigt den Luftwiderstand. Dabei ist zu beachten, dass das Gravitationsfeld $\vec{g}$ auf der y-Achse nach unten, in Richtung des Erdmittelpunkts, ausgerichtet ist. In den Gleichungen wird die Beschleunigung eines fallenden Körpers durch $a = -g$ repräsentiert.

Beispielaufgabe: Fallender Stein

Ein Stein fällt aus dem Stillstand vom Dach eines 100 m hohen Gebäudes. Wie lange braucht der Stein, um unten anzukommen und mit welcher Geschwindigkeit trifft er auf?

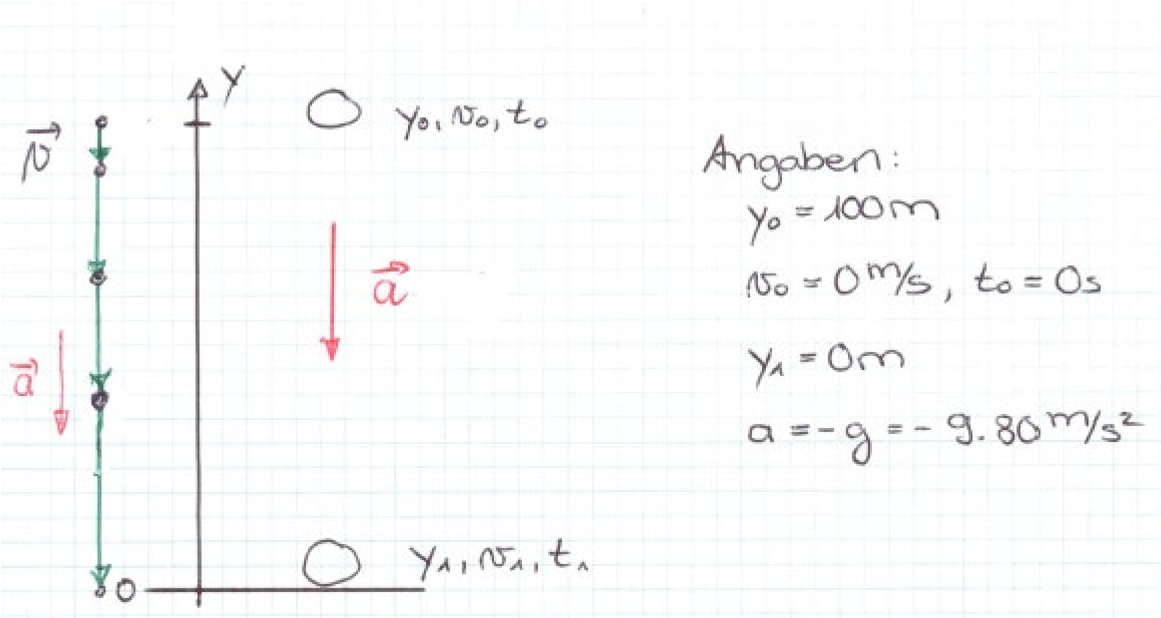


Abbildung 25 Ein Stein fällt aus dem Stillstand vom Dach eines 100 m hohen Gebäudes.

Lösung

Zuerst sollten Sie unbedingt eine Skizze anfertigen und die wichtigsten Angaben aufschreiben das ist in Abbildung 26 gezeigt. Dann erst machen Sie sich an die Lösung der Aufgabe. Die Achse haben wir nach oben gewählt, in diesem Koordinatensystem sind Geschwindigkeit und Beschleunigung negativ.

Der freie Fall ist nichts anderes als eine gleichmässig beschleunigte Bewegung mit a=g. Für die erste Aufgabe können wir Gleichung:

$$y_1 = y(t_1) = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0 t_1 + y_0 = -gt_1^2 + 0 + y_0$$

auflösen nach $t1$, das ergibt:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2(y_0 - y_1)}{g}} = \sqrt{\frac{2(100\ m - 0)}{9.81\ m/s^2}} = 4.52\ s$$

Mit der ersten Gleichung

$$v(t) = v_0 + at$$

erhalten wir die Endgeschwindigkeit:

$$v_1 = v(t_1) = v_0 + at = 0 - gt = -\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(4.52\ s) = -44.3\ m/s$$

Die Geschwindigkeit ist negativ, das ist was wir erwartet haben. Die Zahlen scheinen auch nicht übermässig gross zu sein.

Beispielaufgabe: Antilope

Springantilopen sind in der Lage sehr hohe Sprünge zu machen. Zuerst gehen sie dabei in die Knie und wenn Sie die Knie strecken, dann beschleunigen Sie mit 35 m/s^2 auf einer Strecke von 0.7 m. Berechnen Sie die Sprunghöhe der Antilope.

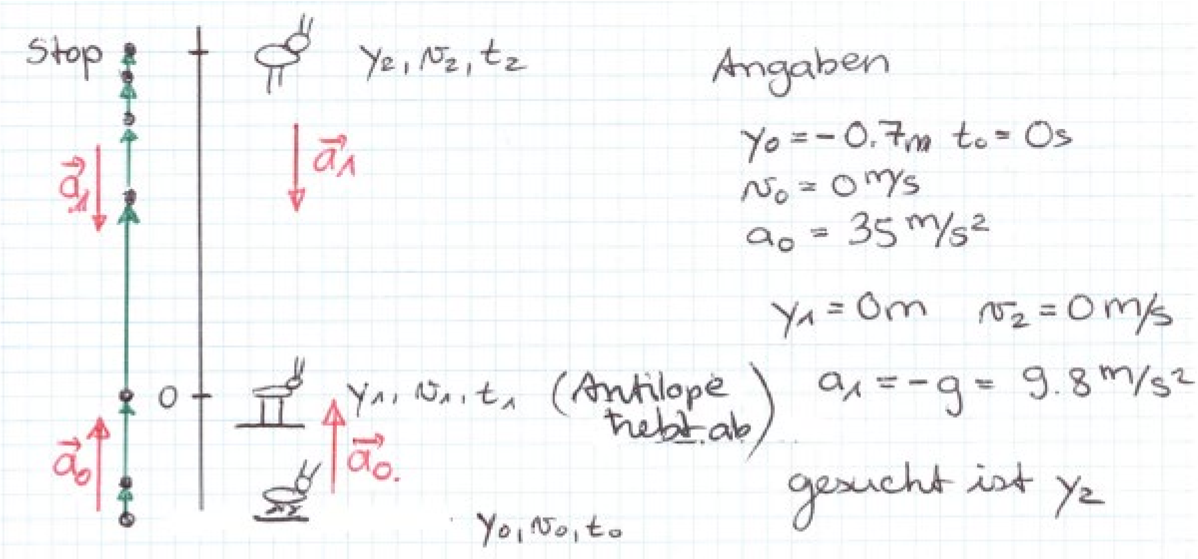


Abbildung 26 Springantilopen sind in der Lage sehr hohe Sprünge zu machen. Zuerst gehen sie dabei in die Knie und wenn Sie die Knie strecken, dann beschleunigen Sie mit 35 m/s^2 auf einer Strecke von 0.7 m.

Lösung

Das Problem hier ist, dass der Sprung zwei Phasen hat und die Frage ist, wo man den Ursprung der Koordinatenachse legt. Wir können den Ursprung dort legen, wo die Antilope abhebt, dann ist die Position wo die Antilope in der Hocke ist, negativ.

Wie ist die Sprunghöhe definiert? Wir wissen, dass auf der maximalen Höhe ein Umkehrpunkt ist, also ist $v_2 = 0$ m/s. Das wird in der Aufgabenstellung nicht explizit gesagt, das wissen wir aus Erfahrung.

Zunächst müssen wir die Geschwindigkeit v1 berechnen, mit der die Antilope vom Boden abhebt, indem wir die Gleichung $v(t)^2 - v_0^2 = 2a(x(t) - x_0)$ benutzen:

$$v_1^2 = v(t_1)^2 = v_0^2 + 2a(y_1 - y_0) = 0 + \left(35\frac{m}{s^2}\right)(0.7\,m) = 49\,m^2/s^2$$

Damit:

$$v_1 = \sqrt{49\,m^2/s^2} = 7m/s$$

Das ist die Geschwindigkeit, mit der die Antilope den Boden verlässt. Ab dem Punkt befindet Sie sich im ''freien Fall'' und die Beschleunigung ist gleich der Erdfeldstärke und negativ. Wir können jetzt noch einmal dieselbe Gleichung benutzen, um die Sprunghöhe zu berechnen:

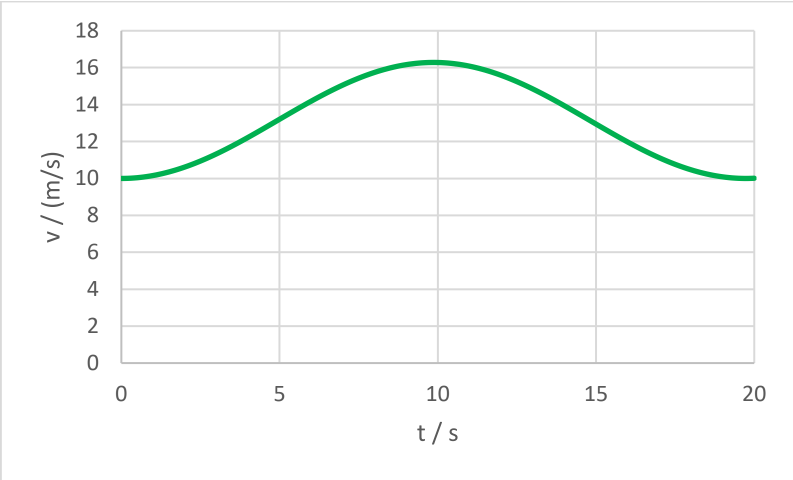
$$v_2^2 = v(t_2)^2 = v_1^2 + 2a_2(y_2 - y_1) = v_1^2 - 2g(y_2 - y_1)$$

Einsetzen von $y_1 = 0$ m und auflösen nach y_2 ergibt:

$$y_2 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(7\frac{m}{s})^2}{2(9.81\frac{m}{s^2})} = 2.5\,m$$

2.5. Momentanbeschleunigung

In der Abbildung ist ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eines Objekts gezeigt, das zuerst beschleunigt und dann wieder langsamer wird. Es ist keine gleichmässig beschleunigte Bewegung. Stattdessen ändert sich die Beschleunigung mit der Zeit.

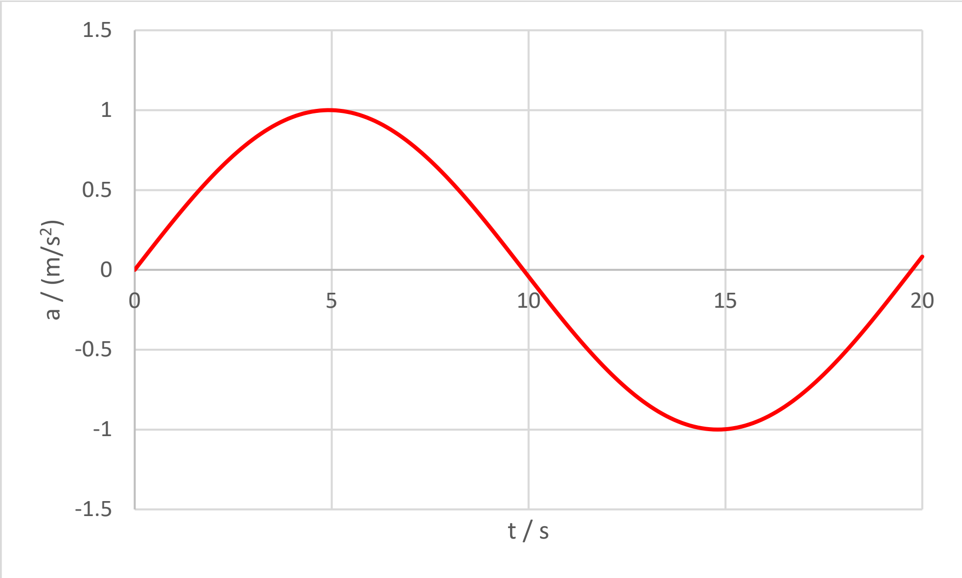


Wir können eine momentane Beschleunigung auf die gleiche Weise definieren wie wir die die Momentangeschwindigkeit definiert haben. Die Momentangeschwindigkeit haben wir gesehen, ist die Änderungsrate der Ort-Zeit-Funktion zu einem bestimmten Zeitpunkt, grafisch die Steigung der Tangente an das Ort-Zeit-diagramms zu diesem Zeitpunkt. In Analogie dazu: Die momentane Beschleunigung zu einem bestimmten Zeitpunkt t ist die Änderungsrate der *Geschwindigkeit*-Zeit-Funktion zu einem bestimmten Zeitpunkt, grafisch die Steigung der Tangente an die Geschwindigkeit-Zeit-Kurve zum Zeitpunkt t.

Mathematisch formuliert:

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Die Momentanbeschleunigung ist die Änderungsrate der Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt.



Umgekehrt aus der Beschleunigung die Geschwindigkeit zu finden, geht analog zu dem Vorgang der Geschwindigkeit die Position zu ermitteln. Um aus der Geschwindigkeit die Position zu bestimmen, unterteilten wir die Geschwindigkeits-Zeit-Kurve in gleichgrosse Schritte und stellten fest, dass die Verschiebung während eines Schrittes die Fläche eines kleinen Rechtecks $\Delta x_i = v(t_i)\Delta t$ war, dann haben wir alle Schritte addiert um die Verschiebung $\Delta \mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} v(t_i)\Delta t$ zu finden. Wir können dasselbe mit der Beschleunigung tun. Eine Beschleunigungskurve kann in sehr schmale gleich grosse Schritte unterteilt werden, so dass die Beschleunigung während jedes Schrittes im Wesentlichen konstant ist. Im Schritt i ändert sich die Geschwindigkeit um $a(t_i)\Delta t$. Dies ist die Fläche des kleinen Rechtecks unter der Stufe. Die gesamte Geschwindigkeitsänderung erhält man durch Addition aller kleinen Rechtecke:

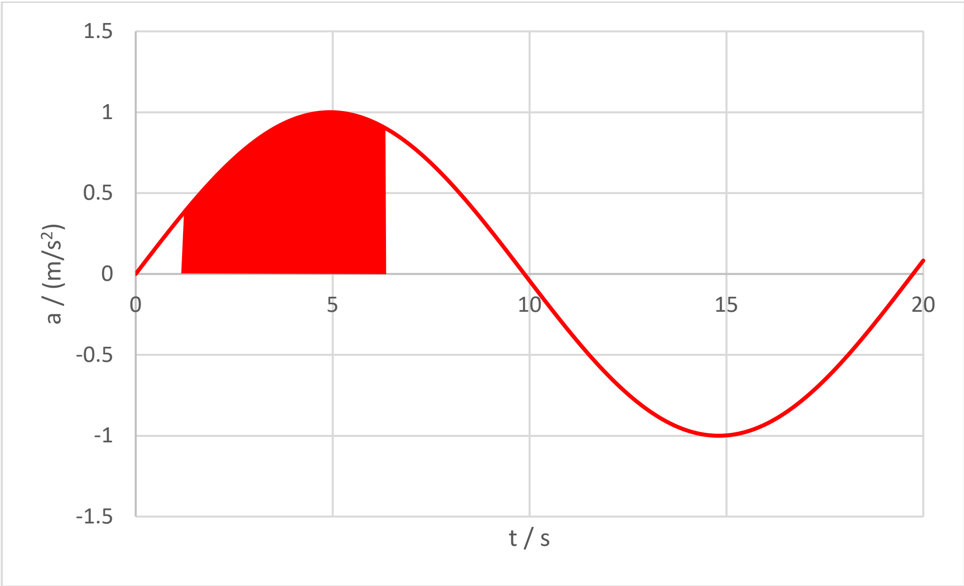
$$\Delta \mathrm{v} \approx \sum_{i=1}^{n} a(t_i)\Delta t$$

Dann haben wir den Grenzwert genommen für Δt gegen Null, d.h. Δt wählen wir sehr sehr klein, aber nicht gleich Null.

Mathematisch formal ausgedrückt:

$$\Delta v = \int_0^t a(\tau)d\tau$$

Graphisch ist das die Fläche zwischen der Beschleunigungs-Zeitkurve und der t-Achse.


1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
a / (m/s²)
0
5
10
15
20
t / s

2.6.1. Ort-, Geschwindigkeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramme

Betrachten wir erneut die Ort-Zeit-, Geschwindigkeit-Zeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramme. Wir haben bereits erkannt, dass das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm aus dem Ort-Zeit-Diagramm abgeleitet werden kann, indem wir die Steigung der Tangente am Ort-Zeit-Diagramm für jeden Punkt ermitteln und diese im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm darstellen. Mathematisch gesehen entspricht der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Ort dem zwischen Beschleunigung und Geschwindigkeit. Um ein Beschleunigung-Zeit-Diagramm aus einem Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zu erstellen, bestimmen wir die Steigung der Tangente im Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zu jedem Zeitpunkt und zeichnen diese im Beschleunigung-Zeit-Diagramm ein.

In Abbildung 28 sind die Ort-Zeit-, Geschwindigkeit-Zeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramme eines frei fallenden Körpers dargestellt. Der Körper wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 m/s nach oben geworfen. Während seiner Aufwärtsbewegung verlangsamt er sich, was sich in einer abnehmenden Steigung der Ort-Zeit-Kurve zeigt. Seine Geschwindigkeit nimmt ab und erreicht am höchsten Punkt seiner Bahn eine Geschwindigkeit von null – an diesem Punkt hat die Ort-Zeit-Kurve ein Maximum und die Steigung ist null. Danach fällt der Körper wieder, wobei seine Geschwindigkeit negativ wird. Die Steigung der Ort-Zeit-Kurve wird nun negativ und nimmt stetig zu. Das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm zeigt eine gerade Linie mit einer konstanten, negativen Steigung. Die Beschleunigung bleibt während des gesamten Fluges konstant bei -9,81 m/s^2.

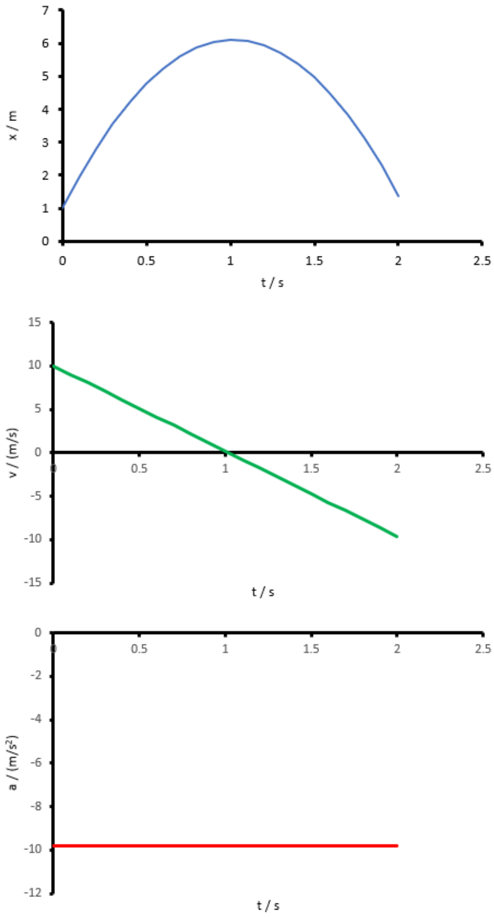


Abbildung 27 Ort-, Geschwindigkeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm eines frei fallenden Körpers. Der Körper wird mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s nach oben geworfen.

In der Abbildung 29 ist das Ort-, Geschwindigkeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm eines Objekts zu sehen, das sich mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts bewegt. Es startet zum Zeitpunkt t= 0s am Ort x=-5 m, also links vom Ursprung des Koordinatensystems. Wie wir im Abschnitt über die gleichförmige Bewegung gelernt haben, ist das Ort-Zeit-Diagramm eine Gerade und die Steigung ist gegeben durch die Geschwindigkeit. Die Beschleunigung ist in diesem Fall immer gleich null.

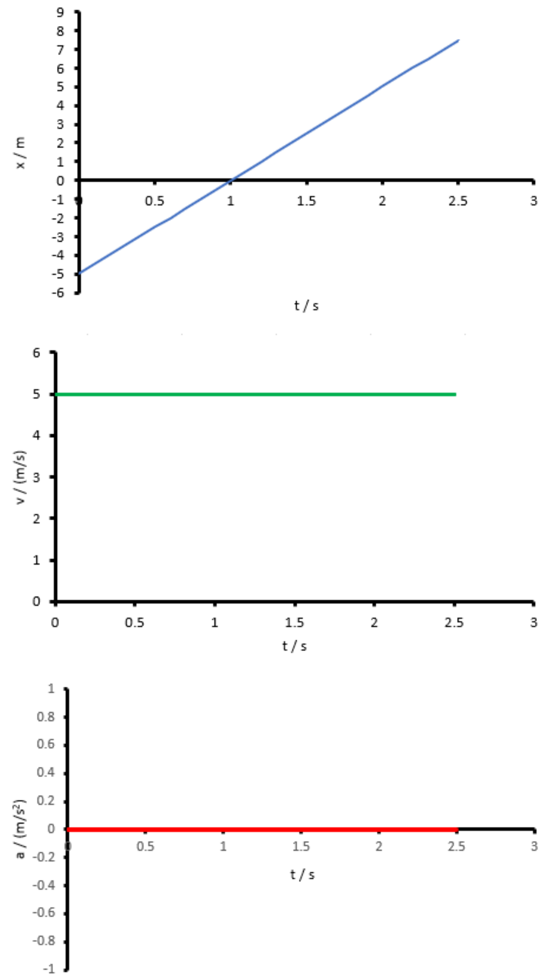


Abbildung 28 Ort-, Geschwindigkeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm eines Objekts, das sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

In der Abbildung 30 ist das Ort-, Geschwindigkeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm eines gleichmässig beschleunigten Objekts zu sehen. Das Objekt startet am Ort x=-1 m, links vom Ursprung des Koordinatensystems mit einer Geschwindigkeit von -2 m/s. Es bewegt sich also zunächst nach links vom Ursprung weg. Seine Beschleunigung ist aber positiv. Da Beschleunigung und Geschwindigkeit unterschiedliche Vorzeichen haben, verringert sich seine Geschwindigkeit zuerst. Bis sie beim Zeitpunkt t=1 s null ist. Das ist auch der Wendepunkt für die Bewegung des Objekts. Die Steigung der x-t-Kurve ist hier null. Danach bewegt sich das Objekt weiter nach rechts. Jetzt haben Geschwindigkeit und Beschleunigung dasselbe Vorzeichen, die Geschwindigkeit nimmt zu. Das Objekt wird schneller. Die Steigung der x-t-Kurve nimmt auch zu. Die Steigung der v-t-Kurve ist immer positiv, die Beschleunigung ist konstant positiv.

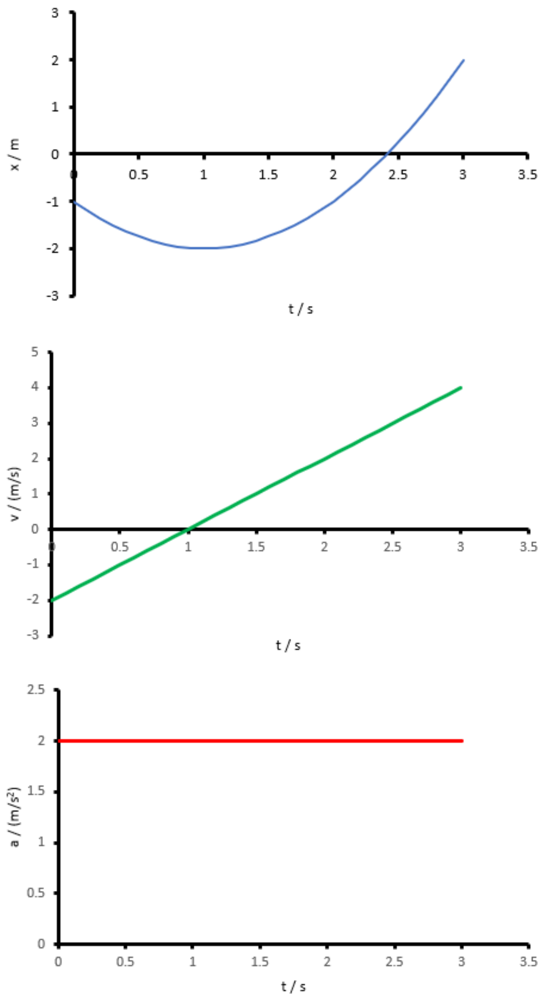


Abbildung 29 Ort-, Geschwindigkeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm eines Objekts, das gleichmässig beschleunigt wird.

In der Abbildung 31 ist das Ort-, Geschwindigkeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm eines Objekts gezeigt, das zuerst gleichmässig beschleunigt wird und sich dann ab Zeitpunkt t=1.5 s mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegt. Die Steigung der x-t-Kurve ist immer positiv, damit ist die Geschwindigkeit immer positiv. Aber die Steigung der x-t-Kurve nimmt ständig ab, damit nimmt also auch die Geschwindigkeit ab. Ab t=1.5 s ist die Geschwindigkeit dann konstant, das x-t-Diagramm ist dann eine Gerade. Die v-t-Kurve hat zunächst eine negative Steigung, die Geschwindigkeit nimmt ja ab. Also ist die Beschleunigung negativ. Ab t=1.5 s ist die Beschleunigung dann null.

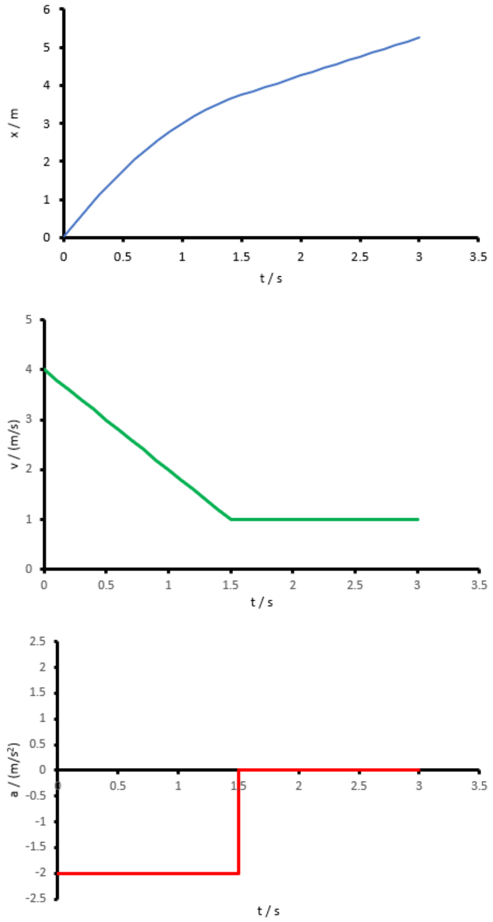


Abbildung 30 Ort-, Geschwindigkeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm eines Objekts, das zuerst gleichmässig beschleunigt wird und sich dann gleichförmig weiterbewegt.

In der Abbildung 32 ist das Ort-, Geschwindigkeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm eines Objekts gezeigt, das sich zuerst mit konstanter Geschwindigkeit, ab t=1 s beschleunigt und dann ab t=2 s wieder mit konstanter Geschwindigkeit weiterbewegt. Man könnte sich darunter eine Kugel vorstellen, die sich zuerst mit konstanter Geschwindigkeit auf einer horizontalen Ebene fortbewegt und dann zum Zeitpunkt t=1 s auf eine geneigte Rampe trifft. Während sie die Rampe hinunterrollt, wird sie beschleunigt. Bei t=2 s trifft sie wieder auf eine horizontale Ebene und rollt diese weiter mit konstanter Geschwindigkeit.

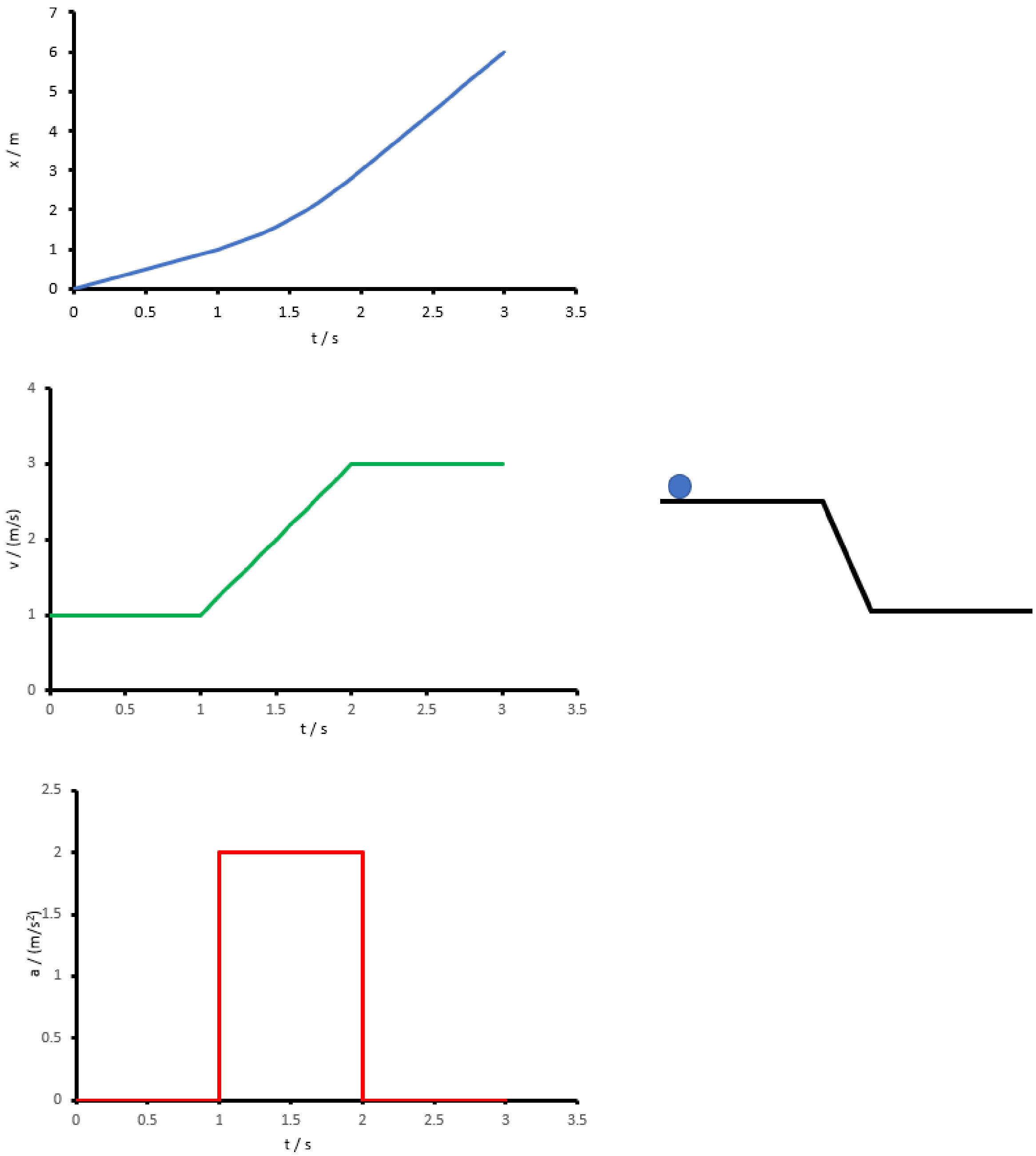


Abbildung 31 Ort-, Geschwindigkeit- und Beschleunigung-Zeit-Diagramm eines Objekts, das sich zuerst mit konstanter Geschwindigkeit, dann beschleunigt und dann wieder mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

3. Kinematik in zwei Dimensionen

Die meisten Bewegungen sind nicht eindimensional, zum Beispiel ein Auto, das um die Kurve fährt, der Mond, der um die Erde kreist oder ein Fussball, der einer Parabel folgt. Deshalb erweitern wir in diesem Abschnitt die Konzepte aus den vorangegangenen Abschnitten auf zwei Dimensionen. Wir werden sehen, dass wir die Beschleunigung in zwei Komponenten aufteilen können: eine Komponente, die tangential zur Bewegung verläuft und eine die orthogonal dazu steht.

3.1. Bewegungsdiagramme

In der Abbildung 33 ist das Bewegungsdiagramm eines Objekts gezeigt, das sich auf einer Kreisbahn bewegt, das kann ein Kind auf einem Karussell sein, ein Stein an einer Schnur, der Mond, der um die Erde kreist, usw. Die Bewegung ist gleichförmig, alle Punkte haben denselben Abstand voneinander, die Geschwindigkeitsvektoren sind alle gleich lang. Und doch ist diese Bewegung beschleunigt. Wenn wir den Beschleunigungsvektor konstruieren:

$$\overrightarrow{\Delta a}_{\text{gem}} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\Delta t}$$

Dann sehen wir, dass dieser nicht gleich null ist, sondern mehr oder weniger zum Kreismittelpunkt hin zeigt. Wir erinnern uns, dass Beschleunigung zwei Dinge bedeuten kann:

1) Der Geschwindigkeitsbetrag ändert.
2) Die Richtung der Geschwindigkeit ändert.

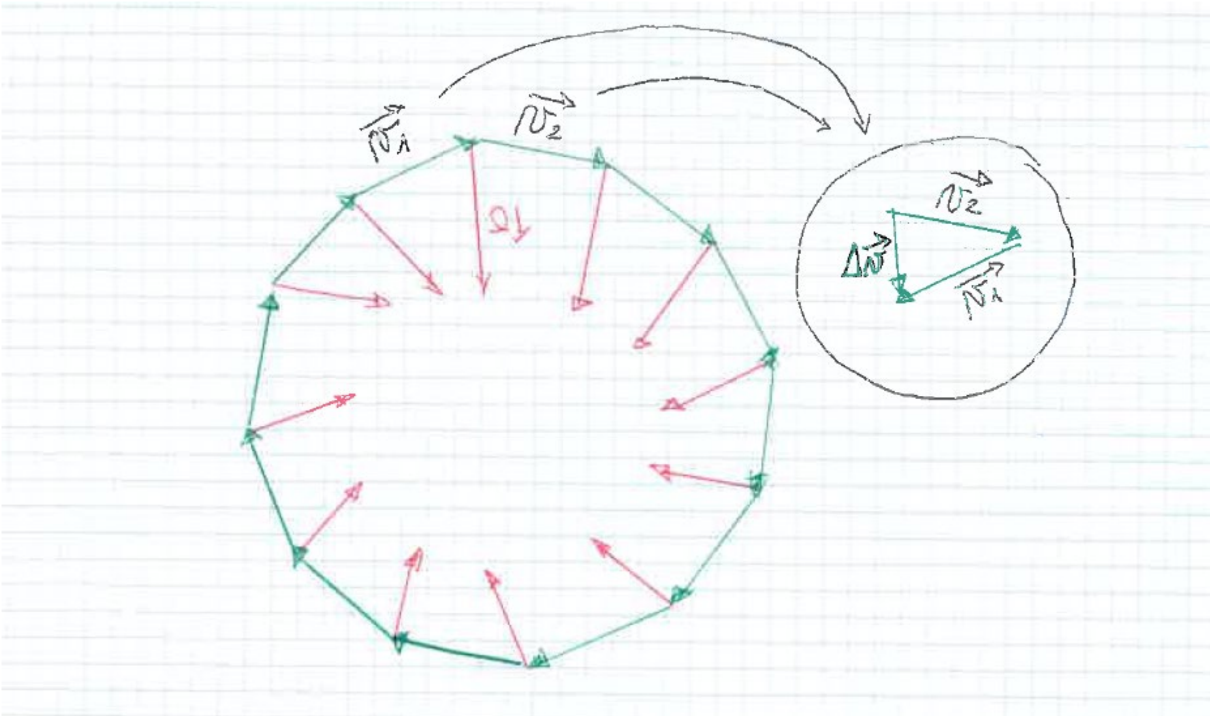


Abbildung 32 Bewegungsdiagramm eines Objekts, das sich auf einer Kreisbahn bewegt. Die Bewegung ist gleichförmig, alle Punkte haben denselben Abstand voneinander, die Geschwindigkeitsvektoren sind alle gleich lang. Und doch ist diese Bewegung beschleunigt.

Ein weiteres Beispiel ist in Abbildung 34 gezeigt. Es handelt sich hier um ein Objekt, das auf einer Rampe hinuntergleitet und dann auf der anderen Seite wieder hoch gleitet. Am Anfang und am Ende ist die Bewegung eindimensional, die Beschleunigung ist parallel (das Objekt wird schneller, der

Geschwindigkeitsvektor wird länger) oder antiparallel (das Objekt wird langsamer, der Geschwindigkeitsvektor wird kürzer) zur Geschwindigkeit gerichtet. Das kennen wir, aber in der Mitte der Bewegung, wenn das Objekt das Tal erreicht, passiert etwas, was wir bisher noch nicht diskutiert haben: Der Geschwindigkeitsvektor ändert seine Richtung und damit ist die Beschleunigung nicht mehr parallel zur Geschwindigkeit. Sie zeigt nach oben und dann im Laufe der Bewegung schief nach links oben.

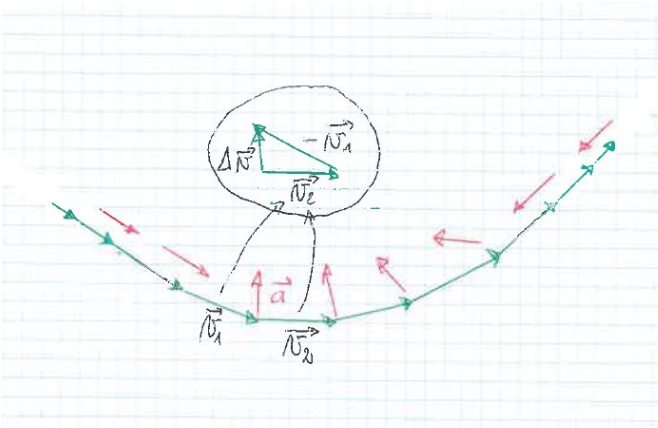


Abbildung 33 Bewegungsdiagramm eines Objekts, das eine Rampe hinunter und dann wieder hinauf gleitet.

3.2. Orts- und Verschiebungsvektor

Im Kapitel 1, haben wir gesehen, dass man die Position eines Körpers anhand seines Ortsvektors $\vec{r}$ beschreiben kann. Dieser erstreckt sich vom Ursprung des Koordinatensystems bis zu dem momentanen Aufenthaltsort des Körpers, siehe Abbildung 35.

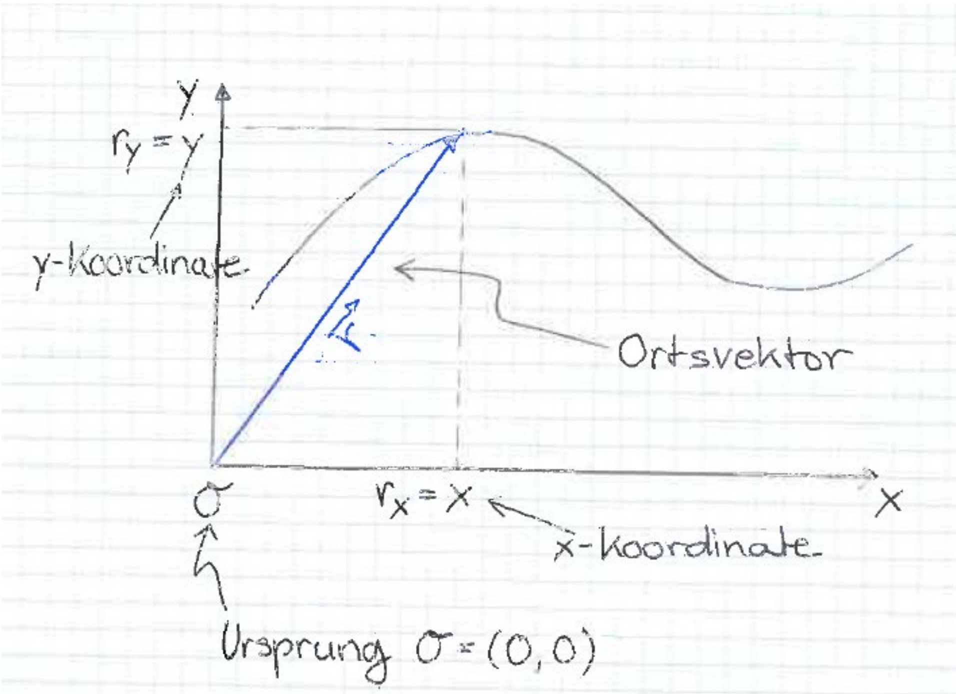


Abbildung 34 Bahnkurve eines Körpers mit seiner momentanen Position und seinem Ortsvektor $\vec{r}$

Den Ortsvektor kann man mit Hilfe seiner x- und y-Komponenten (Koordinaten) schreiben:

$$\vec{r} = \binom{x}{y}$$

Wobei die Koordinaten x und y zeitabhängig sind:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

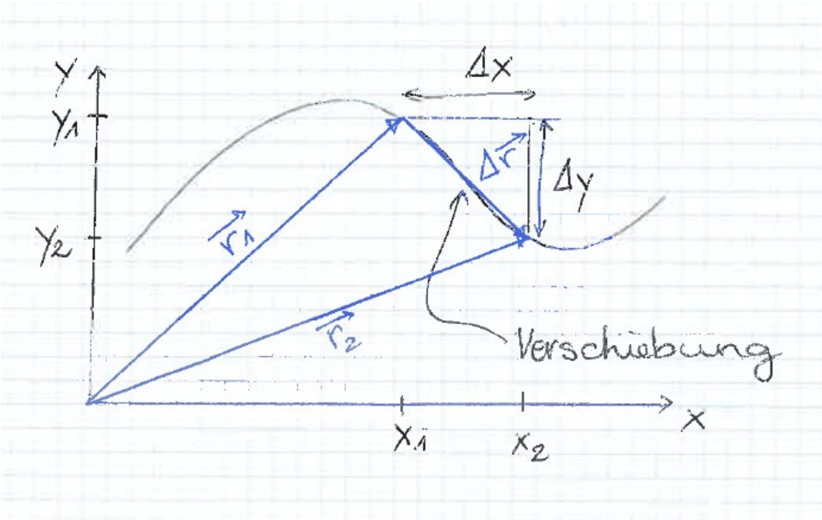


Abbildung 35 Bahnkurve eines Objekts; Positionen des Objekts zu zwei verschiedenen Zeitpunkten 1 und 2; die beiden Ortsvektoren $\vec{r_1}$ zum Zeitpunkt t1 und $\vec{r_2}$ zum Zeitpunkt t2; Verschiebungsvektor $\overrightarrow{\Delta r}$.

Bewegt sich der Körper, dann bewegt sich auch sein Ortsvektor. In der Abbildung 36 ist das Objekt zu zwei verschiedenen Zeitpunkten 1 und 2 aufgetragen. Auch eingezeichnet sind die beiden Ortsvektoren $\vec{r_1}$ zum Zeitpunkt t_1 und $\vec{r_2}$ zum Zeitpunkt t_2. Der Verschiebungsvektor ist gegeben durch:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

wobei der Vektor

$$\vec{r_1} = \vec{r}(t_1) = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{r_2} = \vec{r}(t_2) = \begin{pmatrix} x(t_2) \\ y(t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

also:

$$\overrightarrow{\Delta r} = \begin{pmatrix} x(t_2) - x(t_1) \\ y(t_2) - y(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix}$$

Der Verschiebungsvektor ist in der Abbildung 31 gezeigt.

3.3. Geschwindigkeitsvektor

Im Kapitel 1 haben wir gesehen, wie man aus dem Verschiebungsvektor den Geschwindigkeitsvektor konstruiert, indem man durch das Zeitintervall teilt, in dem die Verschiebung stattgefunden hat.

3.3.1. Durchschnittgeschwindigkeit

Wenn ein Körper in einem Zeitintervall Δt eine Verschiebung $\overrightarrow{\Delta r}$ erfährt, dann ist seine Durchschnittgeschwindigkeit $\vec{v}_{\text{gem}}$ definiert als:

$$\vec{v}_{\text{gem}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

dies bedeutet, dass die Richtung von $\vec{v}_{\text{gem}}$ dieselbe sein muss, wie die Verschiebung $\overrightarrow{\Delta r}$, siehe Abbildung 37.

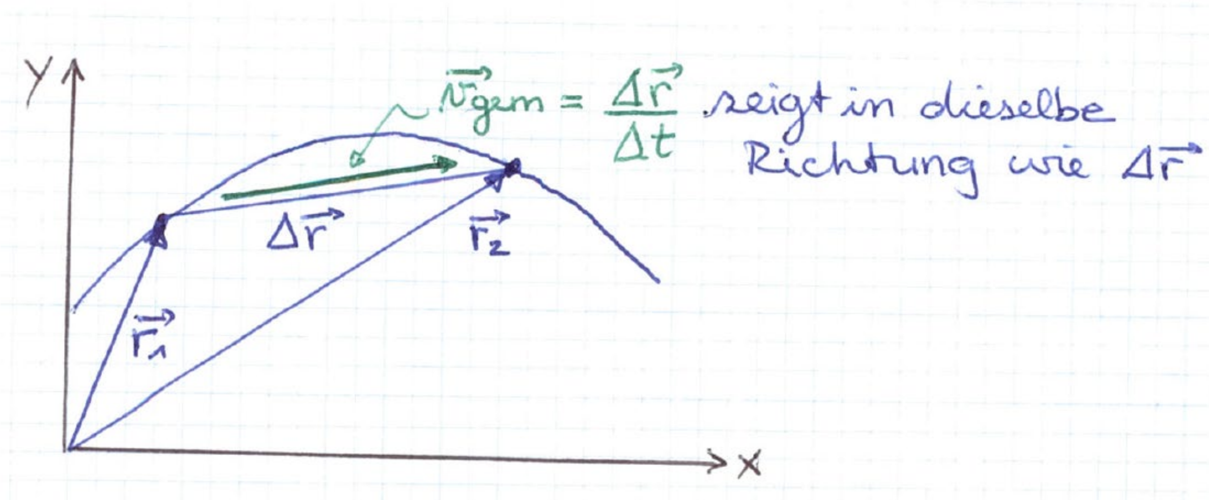


Abbildung 36 Bahnkurve des Körpers mit seinem Verschiebungsvektor und seiner mittleren Geschwindigkeit.

In Vektorschreibweise wird die Durchschnittsgeschwindigkeit geschrieben als:

$$\vec{v}_{\text{gem}} = \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ \frac{\Delta y}{\Delta t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \\ \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \end{pmatrix}$$

3.3.2. Momentangeschwindigkeit

Analog zum eindimensionalen Fall, ist die Momentangeschwindigkeit die Geschwindigkeit eines Körpers zu einem bestimmten Zeitpunkt t. Diese Geschwindigkeit entspricht, analog zum eindimensionalen Fall, dem Grenzwert, den $\vec{v}_{\text{gem}}$ anstrebt, wenn wir das Zeitintervall Δt um diesen Zeitpunkt t herum gegen Null streben lassen:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$$

Formal wird die Momentangeschwindigkeit als Ableitung geschrieben:

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Und wieder wird jede einzelne Komponente abgeleitet:

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}$$

In der Abbildung 38 ist die Bahnkurve eines Körpers gezeigt. Betrachten wir zwei Punkte auf der Kurve. Der Ortsvektor von $\overrightarrow{r_1}$ zu einem früheren Zeitpunkt t_1 zeigt auf Punkt 1 und der Ortsvektor $\overrightarrow{r_2}$ zu einem späteren Zeitpunkt t_2 zeigt auf Punkt 2. Den Grenzwert $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$ zu bilden, bei dem das Zeitintervall Δt gegen Null strebt, bedeutet, dass der Punkt 2 auf der Bahnkurve immer näher zum Punkt 1 wandert. Während der Punkt 2 sich entlang der Kurve nach links bewegt, schwenkt auch sein Ortsvektor nach links. Während des Zeitintervalls Δt ändert der Verschiebungsvektor $\overrightarrow{\Delta r}$ seine Richtung: er nähert sich immer mehr der Tangente an die Bahnkurve an.

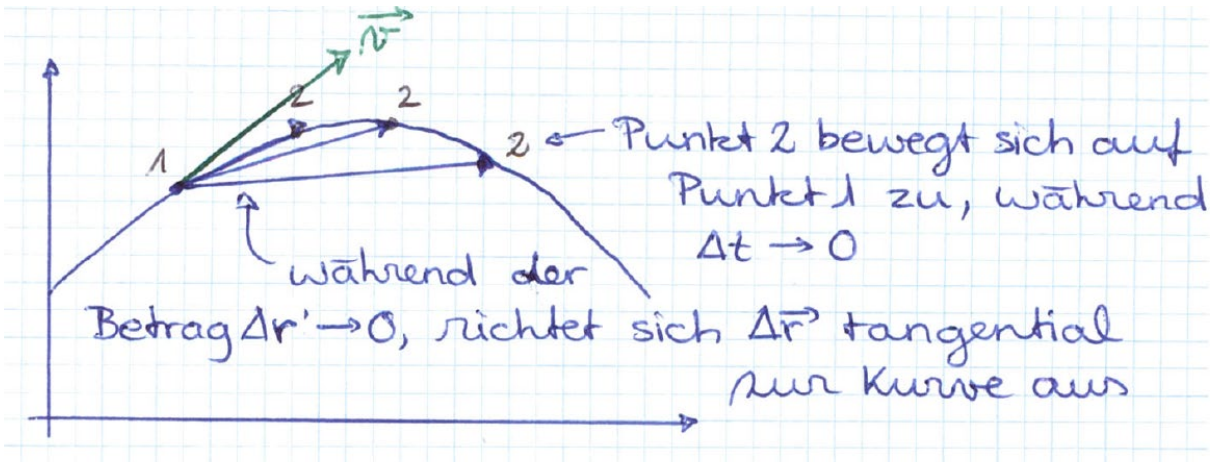


Abbildung 37 Lässt man Δt gegen Null streben, nähert sich $\overrightarrow{r_2}$ dem Ortsvektor $\overrightarrow{r_1}$ an, sodass $\overrightarrow{\Delta r}$ sich der Richtung der Tangente an die Bahnkurve des Körpers am Punkt 1 annähert. Die Durchschnittsgeschwindigkeit $\overrightarrow{\Delta v}_{gem}$ nähert sich der Momentangeschwindigkeit an. Die Momentangeschwindigkeit eines Körpers ist immer tangential zu seiner Bahnkurve.

Die Richtung der Momentangeschwindigkeit $\vec{v}(t)$ eines Körpers verläuft immer tangential zur Bahnkurve des Teilchens am momentanen Ort des Teilchens. Der Vektor $\vec{v}(t)$wird an dem Punkt auf der Bahnkurve des Teilchens aufgezeichnet, auf dem es sich zum Zeitpunkt t befindet, und zwar so, als würde an diesem Punkt die Bewegung geradlinig weitergeführt.

Wenn ein Ortsvektor mit einem Vektor so gezeichnet wird wie in der Abbildung gezeigt, dann erstreckt er sich von einem Punkt zu einem anderen Punkt. Wenn ein Geschwindigkeitsvektor so gezeichnet wird, dann erstreckt er sich nicht von einem Punkt zum anderen. Vielmehr zeigt er in die momentane Richtung, in der sich das Teilchen beim Anfangspunkt des Vektors bewegt. Die Länge des Vektors entspricht dem Betrag der Geschwindigkeit.

3.4. Beschleunigung

3.4.1.1. Durchschnittsbeschleunigung

Wenn sich die Geschwindigkeit eines Körpers innerhalb eines Zeitintervalls Δt von $\overrightarrow{v_1}$ nach $\overrightarrow{v_2}$ ändert, dann wird die Durchschnittsbeschleunigung $\vec{a}_{\text{gem}}$ im Zeitintervall Δt definiert durch:

$$\vec{a}_{\text{gem}} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}}{\Delta t}$$

wobei $\overrightarrow{\Delta v}$ die Änderung der Momentangeschwindigkeit während dieses Zeitintervalls ist.

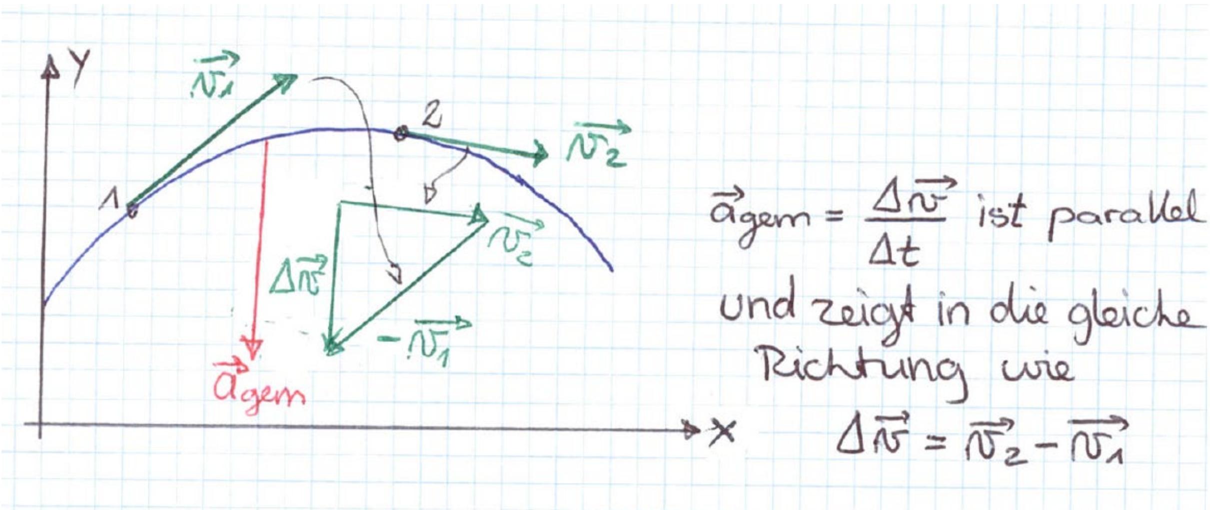


Abbildung 38 Konstruktion des Durchschnittsbeschleunigungsvektors $\vec a_\text{gem}$.

In Abbildung 39 sind die Geschwindigkeitsvektoren $\overrightarrow{v_1}$ nach $\overrightarrow{v_2}$ und die Durchschnittsbeschleunigung $\vec{a}_{\text{gem}}$ aufgetragen. Die Geschwindigkeitsvektoren $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ zeigen jeweils in eine andere Richtung. Die Beschleunigung zeigt in die Richtung der Geschwindigkeitsänderung $\vec{a}_{\text{gem}} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$.

Die Durchschnittsbeschleunigung hat immer die Richtung von der ''Änderung'' $\overrightarrow{\Delta v}$. Auch wenn $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ denselben Betrag, aber unterschiedliche Richtungen haben, dann ist die Differenz zweier solcher Vektoren nicht Null. Somit kann sich die Beschleunigung entweder aus einer Änderung im Betrag der Geschwindigkeit oder aus einer Änderung in der Richtung der Geschwindigkeit oder aus beiden ergeben.

3.4.1.2. Momentanbeschleunigung

Lassen wir Δt um einen bestimmten Zeitpunkt t herum gegen null streben, dann nähert sich $\vec{a}_{\mathrm{gem}}$ im Grenzwert der Momentanbeschleunigung $\vec{a}(t)$ zu diesem Zeitpunkt an:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

Wenn sich die Geschwindigkeit entweder im Betrag oder in der Richtung ändert, dann unterliegt das Teilchen einer Beschleunigung.

Die Beschleunigung wird in Komponentenschreibweise:

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \end{pmatrix}$$

Betrachten wir die beiden Punkte auf der Kurve in Abbildung 34. Den Grenzwert $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$ zu bilden, bedeutet, dass der Punkt 2 auf der Bahnkurve immer näher zum Punkt 1 wandert. Während er sich entlang der Kurve nach rechts bewegt, schwenkt auch sein Geschwindigkeitsvektor mit und nähert sich immer mehr der Tangente an die Bahnkurve an. Der Beschleunigungsvektor nimmt die in Abbildung 40 eingezeichnete Richtung an.

Der Beschleunigungsvektor erstreckt sich nicht von einem Punkt zu einem anderen. Vielmehr zeigt er die Richtung der Beschleunigung des Teilchens an, das sich im Anfangspunkt des Pfeils befindet. Seine Länge entspricht dem Betrag der Beschleunigung. Die Momentanbeschleunigung ist nicht nur dann ungleich null, wenn der Betrag der Geschwindigkeit sich ändert, sondern auch, wenn seine Richtung sich ändert. Eine Person die zum Beispiel mit einem Auto mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag durch eine Kurve fährt, oder ein Kind, das auf einem Karussell fährt, erfahren beide eine Beschleunigung auf Grund einer Änderung in der Richtung der Geschwindigkeit, obwohl ihr Betrag konstant bleiben kann.

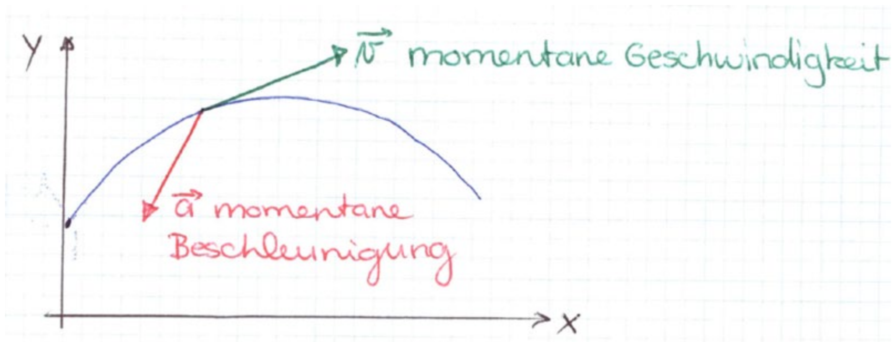


Abbildung 39 Bahnkurve eines Objekts mit seiner momentanen Geschwindigkeit und seiner momentanen Beschleunigung.

Alternativ zur Zerlegung des Beschleunigungsvektors in eine x- und y-Komponente ist es oft zweckmässiger diesen in eine Komponente tangential zur Bahn und eine dazu senkrechte, radiale Komponente zu zerlegen, siehe Abbildung 41.

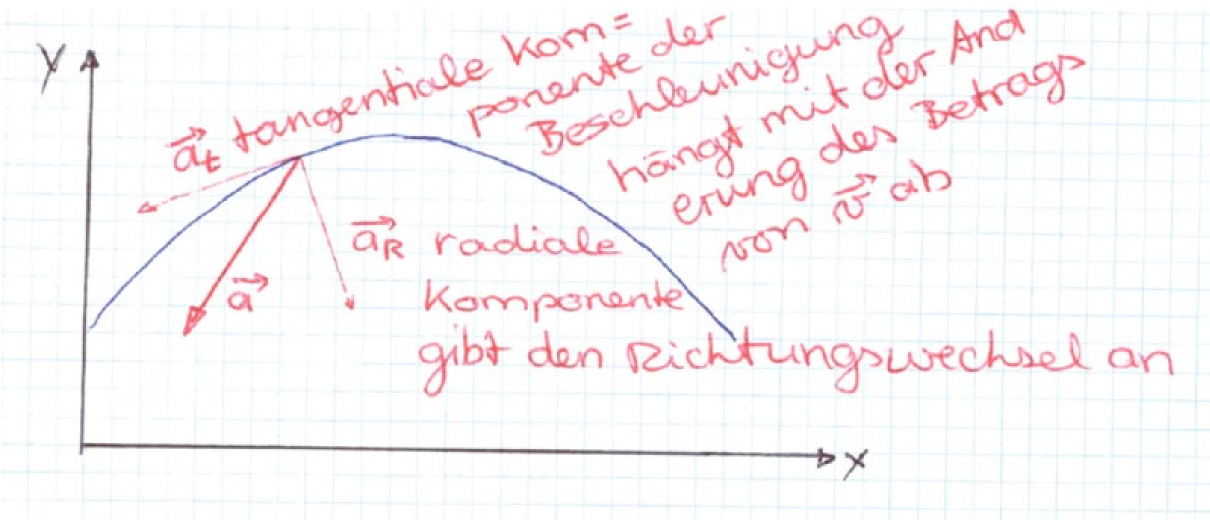


Abbildung 40 Radial- und Tangentialkomponenten der Beschleunigung.

Die tangentiale Komponente bewirkt eine Verlängerung oder Verkürzung des Geschwindigkeitsvektors, während die radiale Komponente eine Richtungsänderung bewirkt.

3.5. Gleichmässig beschleunigte Bewegung in 2d

Im Kapitel 2.5 haben wir die Gleichungen für die gleichmässig beschleunigte Bewegung in einer Dimension hergeleitet. Jetzt erweitern wir diese Ideen auf zwei Dimensionen. In diesem Abschnitt ist sowohl die Richtung als auch der Betrag der Beschleunigung konstant. Das bedeutet, dass

$$a_x = \text{konst und } a_y = \text{konst}$$

In diesem Fall ist die Durchschnittsbeschleunigung zu jedem Zeitpunkt gleich der Momentanbeschleunigung. Die Gleichungen, die wir in Kapitel 2 für eine Dimension hergeleitet haben, gelten getrennt für jede Komponente der Beschleunigung, der Geschwindigkeit und der Position des Objekts, welches eine Bewegung in zwei Dimensionen ausführt. Wir können die Gleichungen in einer Tabelle zusammenfassen:

Tabelle 2 Beziehungen zwischen Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Zeit bei einer gleichmässig beschleunigten Bewegung in zwei Dimensionen

$a_x(t_0) = a_x(t_1) = a_x = \text{konst}$	$a_y(t_0) = a_y(t_1) = a_y = \text{konst}$
$v_x(t_1) = a_x(t_1 - t_0) + v_{x0}$	$v_y(t_1) = a_y(t_1 - t_0) + v_{y0}$
$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{2}a_x(t_1 - t_0)^2 + v_{0x}(t_1 - t_0) + x_0$	$y_1 = y(t_1) = \frac{1}{2}a_y(t_1 - t_0)^2 + v_{0y}(t_1 - t_0) + y_0$
$v_{x1}^2 - v_{x0}^2 = 2a(x_1 - x_0)$	$v_{y1}^2 - v_{y0}^2 = 2a(y_1 - y_0)$

3.5.1. Beispielaufgabe: Shuttle

Die Schubdüsen eines Raumschiffshuttles geben ihm eine Aufwärtsbeschleunigung von 5.0 m/s^2. und eine Vorwärtsbeschleunigung von 20 m/s^2. Zuerst werden nur die Aufwärts-Triebwerke eingeschaltet, siehe Abbildung 42. Nach 3.0 s, werden auch die Vorwärtsschubdüsen hinzugeschaltet. Zeichnen Sie die Flugbahn des Shuttles für die ersten 6 s.

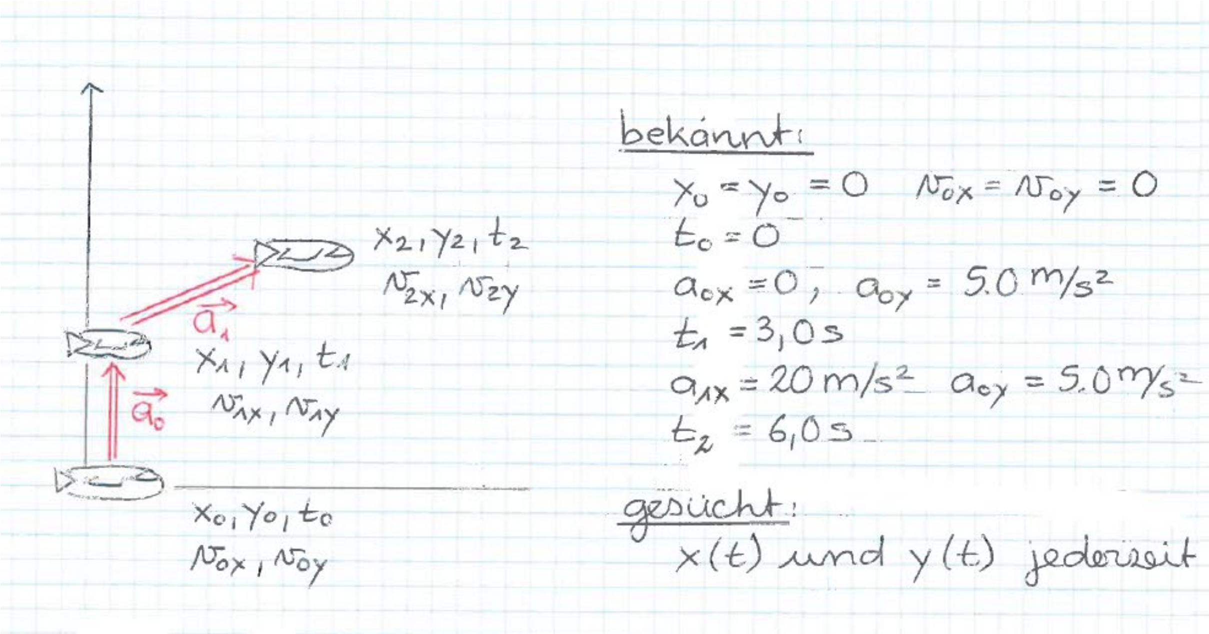


Abbildung 41 Die Schubdüsen eines Raumschiffshuttles geben ihm eine Aufwärtsbeschleunigung von 5.0 m/s2. und eine Vorwärtsbeschleunigung von 20 m/s2. Zuerst werden nur die Aufwärts-Triebwerke eingeschaltet. Nach 3.0 s, werden auch die Vorwärtsschubdüsen hinzugeschaltet.

Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass das Shuttle am Ursprung startet und sich zunächst entlang der y-Achse bewegt. Das Fahrzeug bewegt sich vertikal für 3.0 s, dann beginnt es eine Vorwärtsbewegung. Es gibt drei Punkte in der Aufgabe: der Anfang und das Ende der Aufwärtsbewegung und der Punkt wo die Vorwärtsstrahler eingeschaltet werden. Diese Punkte sind mit den Bezeichnungen (x0,y0), (x1,y1) und (x2,y2). Die Geschwindigkeiten sind (v0x, v0y), (v1x, v1y,) und (v2x, v2y) gekennzeichnet.

In der ersten Phase gelten folgende Beziehungen

$$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{2}a_{0x}(t_1 - t_0)^2 + v_{0x}(t_1 - t_0) + x_0$$

$$y_1 = y(t_1) = \frac{1}{2}a_{0y}(t_1 - t_0)^2 + v_{0y}(t_1 - t_0) + y_0$$

Bekannte Zahlen eingesetzt, ergibt:

$$x_1 = 0 + 0 + 0$$

$$y_1 = \frac{1}{2}(5.0\, m/s^2)(3.0\, s - 0)^2 + 0 \cdot (3.0\, s - 0) + 0$$

Das Shuttle macht in den ersten drei Sekunden keine Bewegung nach rechts, nur aufwärts

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{5.0\, m}{s^2}\right)(3.0\, s)^2 = 22.5\, m$$

Für die erste Phase erhalten wir also das Resultat: $(x_1, y_1) = (0{,}22.5)$. Diesen Punkt tragen wir in der Abbildung ein.

Für die zweite Phase gelten folgende Gleichungen:

$$x_2 = x(t_2) = \frac{1}{2}a_{1x}(t_2 - t_1)^2 + v_{0x}(t_2 - t_1) + x_1$$

$$y_2 = y(t_2) = \frac{1}{2}a_{1y}(t_2 - t_1)^2 + v_{0y}(t_2 - t_1) + y_1$$

Bekannte Zahlen eingesetzt, ergibt:

$$x_2 = x(t_2) = \frac{1}{2}(20\, m/s^2)(t_2 - 3.0\, s)^2 + v_{0x}(t_2 - 3.0\, s) + 0$$

$$y_2 = y(t_2) = \frac{1}{2}(5.0\, m/s^2)(t_2 - 3.0\, s)^2 + v_{0y}(t_2 - 3.0\, s) + 22.5\, m$$

In Tabelle sind x und y ausgerechnet worden für t2=3, 4, 5 und 6 s

t2/s	x/m	y/m
3	0	22.5
4	10	40
5	40	62.5
6	90	90

Die Werte wurden in der Abbildung 43 in ein x-y-Diagramm aufgetragen.

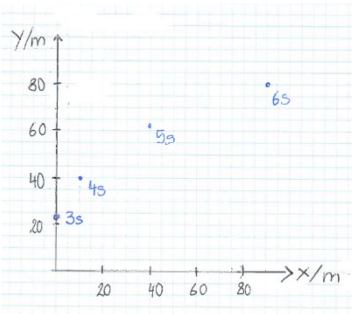


Abbildung 42 x-y-Diagramm des Spaceshuttles.

3.5.1. Wurfbewegung

Objekte, ob Bälle, die durch die Luft geworfen werden, oder Kugeln, die aus Kanonen abgefeuert werden, demonstrieren das Phänomen der Wurfbewegung. In dieser Bewegung agiert lediglich die Schwerkraft auf das Objekt. Es handelt sich hierbei um eine fortgeschrittene Form der Freifallbewegung, die bereits im Abschnitt «2.5.2. Der freie Fall» thematisiert wurde. Auch hier lassen wir den Einfluss des Luftwiderstands ausser Acht.

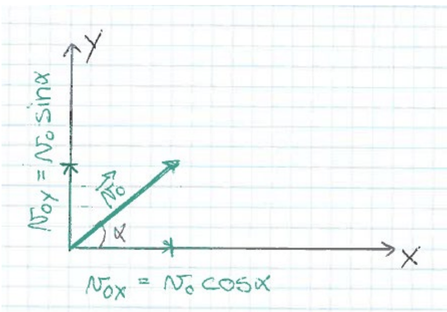


Abbildung 43 Anfangsgeschwindigkeit der Kugel, die zum Zeitpunkt t=0 s beim Ursprung weggeschossen wird.

Abbildung 44 zeigt die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel in einem Koordinatensystem, welches so gewählt wurde, dass die Kugel zum Zeitpunkt t=0 s im Ursprung startet. Der Geschwindigkeitsvektor bildet mit der x-Achse einen Winkel α und schreibt sich:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_{ox} \\ v_{oy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_o \cos\alpha \\ v_o \sin\alpha \end{pmatrix}$$

Der Beschleunigungsvektor zeigt vertikal nach unten und sein Betrag ist gleich der Gravitationsfeldstärke (Erdbeschleunigung) g:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Wir können die x- und y-Bewegung getrennt voneinander betrachten. Dann haben wir in x-Richtung eine gleichförmige Bewegung und in y-Richtung eine gleichmässig beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung -g. Es gelten die Beziehungen aus Tabelle 1 für die Geschwindigkeit:

$$v_{x1} = v_{x0} + a_x t$$

$$v_{y1} = v_{y0} + a_y t$$

Einsetzen der Beschleunigungskoordinaten:

$$v_{x1} = v_{x0} = v_o \cos\alpha$$

$$v_{y1} = v_{y0} - gt = v_o \sin\alpha - gt$$

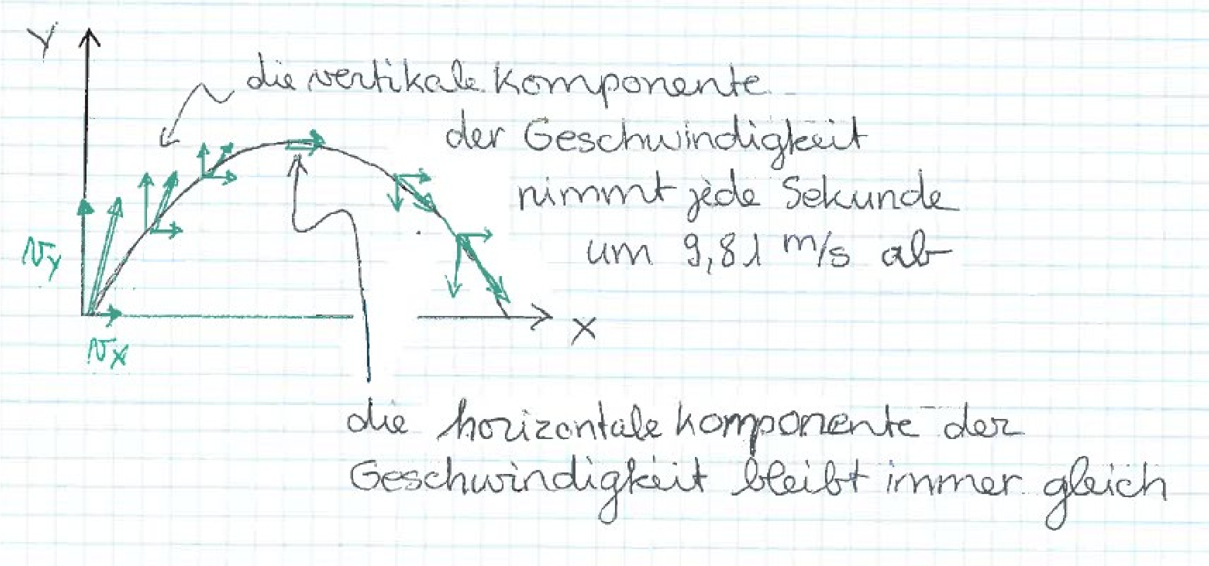


Abbildung 44 Abbildung zeigt den Geschwindigkeitsvektor und seine beiden Koordinaten. Die vertikale Koordinate des Geschwindigkeitsvektors nimmt jede Sekunde um g=9.81 m/s ab, während die horizontale Komponente sich nicht verändert.

Abbildung 45 zeigt den Geschwindigkeitsvektor und seine beiden Koordinaten. Die vertikale Koordinate des Geschwindigkeitsvektors nimmt jede Sekunde um g=9.81 m/s ab, während die horizontale Komponente sich nicht verändert. Daraus folgt, dass der Geschwindigkeitsvektor zuerst nach rechts oben und dann nach rechts unten zeigt und die Bewegung folgt einer Parabel.

Es gelten die Beziehungen aus Tabelle 2 für den Ort:

$$x_1 = \frac{1}{2}a_{0x}(t_1 - t_0)^2 + v_{0x}(t_1 - t_0) + x_0$$

$$y_1 = \frac{1}{2}a_{0y}(t_1 - t_0)^2 + v_{0y}(t_1 - t_0) + y_0$$

Setzen wir die Koordinaten der Beschleunigung und der Geschwindigkeit ein, erhalten wir:

$$x_1 = v_{0x}(t_1 - t_0) + x_0$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}g(t_1 - t_0)^2 + v_{0y}(t_1 - t_0) + y_0$$

Meistens kann man diese Gleichungen vereinfachen, indem man den Ursprung bei $t_0 = 0$ wählt, dann werden die Gleichungen:

$$x(t) = v_{0x}t + x_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$$

oder:

$$x(t) = (v_o \cos\alpha)t + x_0$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_o \sin\alpha)t + y_0$$

Beweis, dass die Bewegung wirklich eine Parabel ist:

Jetzt wollen wir zeigen, dass es sich bei der Bewegung auch tatsächlich um eine Parabel handelt. Dazu lösen wir die x-Gleichung nach der Zeit auf:

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

und setzen diese in die y-Gleichung ein:

$$y(x) = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$$

Wir erhalten eine Funktion y von x die quadratisch in x ist, also vollführt die Kugel eine Parabel.

Berechnung des Scheitelpunktes:

Als Scheitelpunkt bezeichnet man den Punkt der Bahnkurve mit der grössten y-Koordinate; dort ist die vertikale Geschwindigkeit v_y Null. Die Zeitspanne vom Abwurf bis zum Erreichen dieses Scheitelpunktes bezeichnet man als Steigzeit t_S. Die Steigzeit berechnet sich dann mit v_y -Gleichung:

$$v_y = v_{0y} - gt$$

Indem man benutzt, dass die vertikale Geschwindigkeit in dem Punkt null ist:

$$0 = v_{0y} - gt_S$$

Nach t auflösen gibt die Steigzeit:

$$t_S = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_o \sin\alpha}{g}$$

Einsetzen in die Gleichungen für x und y gibt die Scheitelkoordinaten der Bewegung:

$$x_S = v_{0x}\left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right) + x_0$$

$$y_S = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_{0y}\left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right) + y_0$$

oder:

$$x_S = (v_o \cos\alpha)\left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right) + x_0$$

$$y_S = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right)^2 + (v_o \sin\alpha)\left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right) + y_0$$

Benutzen wir die trigonometrische Formel:

$$\cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

Dann vereinfachen sich die Gleichungen noch:

$$x_S = \left(\frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{2g}\right) + x_0$$

$$y_S = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{(v_o \sin\alpha)^2}{g} + y_0$$

Daraus die Scheitelkoordinaten:

$$x_S = \left(\frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{2g}\right) + x_0$$

$$y_S = \frac{(v_o \sin\alpha)^2}{2g} + y_0$$

Reichweite berechnen:

Kommen wir zur Reichweite. Um die Reichweite eines Wurfes zu bestimmen, setzen wir die x-Gleichung gleich R das ist die Reichweite und die y-Gleichung auf Null, weil das Objekt dann wieder auf dem Boden auftrifft:

$$\begin{cases} R = 0 + v_{0x}t \\ 0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Dann lösen wir die x -Gleichung nach t auf:

$$t = \frac{R}{v_{ox}}$$

Und einsetzen in die y-Gleichung gibt:

$$0 = v_{0y}\left(\frac{R}{v_{ox}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{R}{v_{ox}}\right)^2$$

Diese Gleichung hat eine Lösung für $R = 0$, die zweite Lösung erhalten wir indem wir durch $R \neq 0$ dividieren:

$$0 = v_{0y}\left(\frac{1}{v_{ox}}\right) - \frac{1}{2}g\frac{R}{v_{ox}^2}$$

und mit v_{ox} multiplizieren:

$$0 = v_{0y} - \frac{1}{2}g\frac{R}{v_{ox}}$$

Auflösen nach ergibt:

$$R = \frac{2(v_{ox})(v_{oy})}{g}$$

$$R = \frac{2(v_o \cos\alpha)(v_o \sin\alpha)}{g}$$

Benutzen wir die trigonometrische Formel:

$$\cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

dann gibt das die Reichweite:

$$R = \frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Wir können die wichtigsten Gleichungen in einer Tabelle 3 zusammenfassen:

Tabelle 3 Beziehungen zwischen Ort, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Zeit bei einer Wurfbewegung

	x-Gleichungen	y-Gleichungen
1		
2	$a_x = 0$	$a_y = -g$
3	$v_x(t_1) = v_{x0} = v_o \cos\alpha$	$v_y(t_1) = v_{oy} - gt = v_o \sin\alpha - gt$
4	$x(t) = (v_o \cos\alpha)t + x_0$	$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_o \sin\alpha)t + y_0$
5	Gleichung ohne die Zeit t	$v_{y1}^2 - v_{y0}^2 = -2g(y_1 - y_0)$
6	Scheitelpunkt	$x_S = \left(\frac{v_o^2 \sin 2\alpha}{2g}\right) + x_0$ $y_S = \frac{(v_o \sin\alpha)^2}{2g} + y_0$
7	Maximale horizontale Reichweite, wenn Absprung und Aufprall auf derselben Höhe stattfinden ($y_1 = y_0$):	$R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

Beispiel: Horizontaler Wurf

Aus wikipedia: Im August 2004 stellte Markus Maire aus Plaffeien einen neuen Rekord auf; er stiess den Unspunnenstein 4.11 Meter weit. Gehen wir davon aus, dass er den Stein horizontal aus einer Höhe von 2.0 Metern geworfen hat, mit welcher Geschwindigkeit ist der Stein losgeflogen?

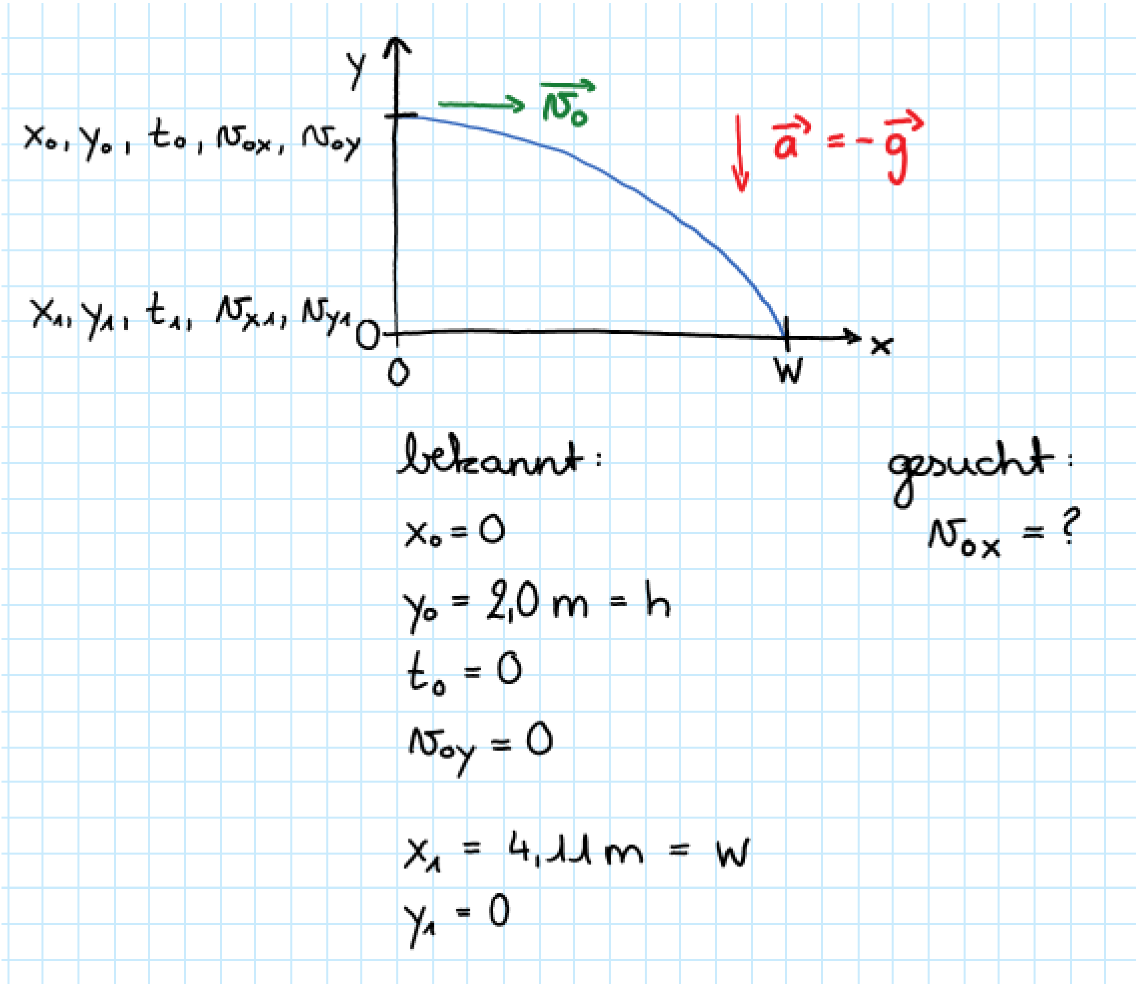


Abbildung 45 Skizze zur Aufgabe Unspunnenstein.

Lösung

Eine Skizze ist in Abbildung 46 gezeigt. Es ist sehr wichtig, dass Sie so eine Skizze machen, denn die Anzahl der Variablen ist bei einer Wurfbewegung ziemlich gross. Wir haben uns dafür entschieden, den Ursprung an den Fuss von Markus Maire zu legen. Wir haben die Punkte 0, wenn der Stein losfliegt mit x0, y0, t0, v0x, v0y und den Punkt 1, wenn der Stein wieder auf dem Boden aufprallt mit x1, y1, v1x, v1y und t1 gekennzeichnet. Dann haben wir alle Angaben aufgeschrieben.

Es gelten folgende Gleichungen:

$$x_1 = v_{0x}(t_1 - t_0) + x_0$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}g(t_1 - t_0)^2 + v_{0y}(t_1 - t_0) + y_0$$

Die Bewegung in x-Richtung ist gleichförmig:

$$x_1 = v_{0x}(t_1 - t_0) + x_0$$

Und startet bei t=0 bei x=0:

$$x = v_o t$$

Der Stein trifft bei $w = 4.11$ m zum Zeitpunkt t_w auf den Boden auf, daraus erhalten wir seine anfängliche Geschwindigkeit:

$$v_o = \frac{w}{t_w}$$

Die Zeit t_w erhalten wir aus der y-Gleichung:

$$y_1 = -\frac{1}{2}g(t_1 - t_0)^2 + v_{0y}(t_1 - t_0) + y_0$$

Bei t=0 befindet sich der Stein auf einer Höhe h=2.0 m und die vertikale Geschwindigkeit ist Null, weil der Stein horizontal losgeworfen wird, damit erhalten wir:

$$y(t) = -\frac{1}{2}g(t_1 - 0)^2 + 0 \cdot (t_1 - 0) + h$$

Beit t_w trifft der Stein auf dem Boden auf, seine y-Koordinate ist dann Null:

$$0 = -\frac{1}{2}g t_w^2 + h$$

Daraus erhalten wir die Flugzeit des Steins:

$$t_w = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Einsetzen oben ergibt die Anfangsgeschwindigkeit:

$$v_o = \frac{w}{t_w} = \sqrt{\frac{g}{2h}}w = \sqrt{\frac{9.81\,\frac{m}{s^2}}{2(2\ m)}}(4.11m) = 6.4\ m/s$$

Beispiel Wurfparabel

Aus wikipedia: Beim Hornussen wird eine Kunststoffscheibe (den Hornuss) so weit wie möglich geschlagen. Der Hornuss kann dabei bis zu 350 Metern weit fliegen. Gehen wir davon aus, dass der Luftwiderstand vernachlässigt werden kann, vernachlässigen wir, dass der Hornuss von einem leicht erhöhten Bock weggeschlagen wird, und nehmen wir weiter an, dass der Hornuss unter einem idealen Winkel von 45 ° weggeschlagen wird.

Berechnen Sie:

a) den Betrag der Anfangsgeschwindigkeit des Hornusses,

b) seine maximale Höhe und

c) die Dauer seines Flugs.

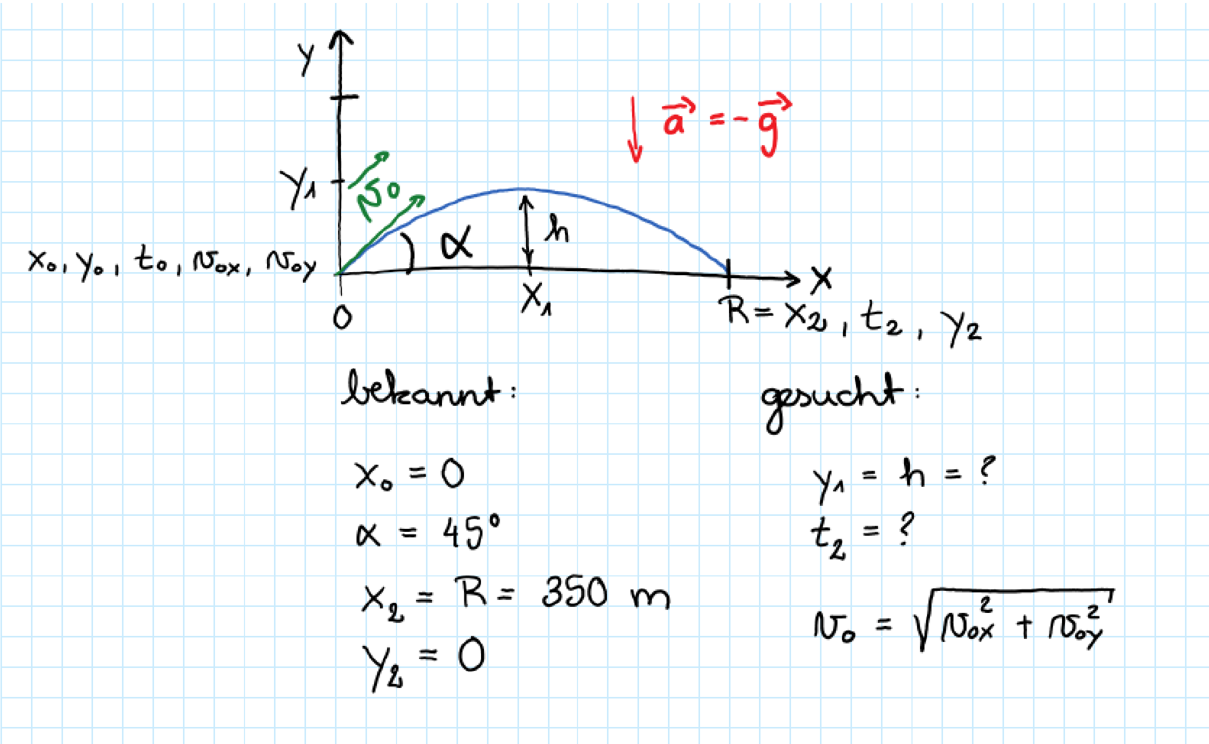


Abbildung 46 Skizze zur Wurfbewegung des Hornusses.

Lösung

Stellen Sie den Ball als Punkt im freien Fall dar. Eine Skizze ist in Abbildung 47 gezeigt. Wir haben uns dafür entschieden, den Ursprung unten am Boden an den Punkt gelegt, von wo der Ball losgetreten wurde. Wir haben die Punkte 0, wenn der Ball den Fuss verlässt mit x0, y0, t0, v0x, v0y und den Punkt 1, wenn er wieder am Boden auftrifft mit x1, y1, v1x, v1y und t1 gekennzeichnet. Dann haben wir alle Angaben aufgeschrieben.

Es gelten folgende Gleichungen:

$$x_1 = v_{0x}(t_1 - t_0) + x_0$$

$$y_1 = -\frac{1}{2}g(t_1 - t_0)^2 + v_{0y}(t_1 - t_0) + y_0$$

Einsetzen der Zahlen, die wir bereits wissen, vereinfachen die Gleichungen:

$$x_1 = (v_0 \cos\alpha)(t_1 - 0) + 0$$

$$0 = -\frac{1}{2} g (t_1 - 0)^2 + (v_0 \sin\alpha)(t_1 - 0) + 0$$

Daraus:

$$x_1 = (v_0 \cos\alpha) t_1$$

$$0 = -\frac{1}{2} g t_1^2 + (v_0 \sin\alpha) t_1$$

a) Um die Anfangsgeschwindigkeit zu berechnen, klammern wir in der y-Gleichung t1 aus:

$$0 = \left[-\frac{1}{2} g t_1 + (v_0 \sin\alpha)\right] t_1$$

Daraus folgt, dass t1 entweder Null ist oder:

$$t_1 = \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g}$$

Einsetzen bei x1 gibt:

$$x_1 = (v_0 \cos\alpha) \frac{2 v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Auflösen nach v0 gibt die Lösung:

$$v_0 = \sqrt{\frac{x_1 g}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\frac{(100\ m)(9.81 \frac{m}{s^2})}{\sin 60°}} = 33.6\ m/s$$

b) Den Scheitelpunkt der Bewegung erhält man, indem man benutzt, dass die vertikale Geschwindigkeit in dem Punkt null ist:

$$0 = v_{0y} - g t_S$$

Nach t auflösen gibt die Steigzeit:

$$t_S = \frac{v_{oy}}{g} = \frac{v_o \sin\alpha}{g}$$

Einsetzen in die Gleichungen für y gibt die maximale y-Koordinate der Bewegung:

$$y_1 = h = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right)^2 + (v_o \sin\alpha)\left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right)$$

Benutzen wir die trigonometrische Formel:

$$\cos\alpha \sin\alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

Dann vereinfachen sich die Gleichungen noch:

$$h = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{(v_o \sin\alpha)^2}{g}$$

und schlussendlich:

$h = \frac{(v_o \sin\alpha)^2}{2g} = \frac{(41.4\ m/s)(\sin 45°)^2}{2\ (9.81)}$=43.75 m

c) Die Dauer des Fluges erhalten wir aus:

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2(41.4\frac{m}{s}) \sin 45\ °}{9.81\ m/s^2} = 6.0\ s$$

3.5.2. Gleichförmige Kreisbewegung

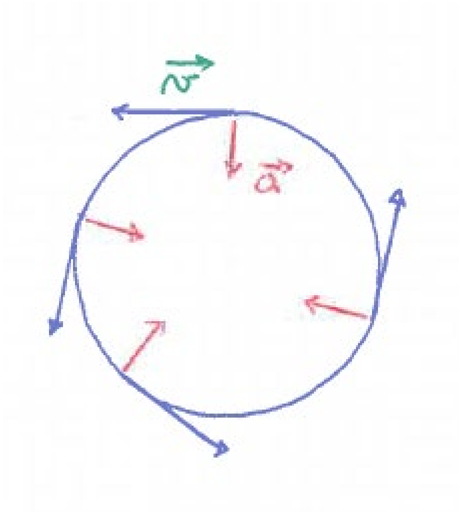


Abbildung 47 Gleichförmige Kreisbewegung: Der Geschwindigkeitsvektor ist tangential zum Kreis und hat immer denselben Betrag. Die Beschleunigung zeigt immer radial zum Kreismittelpunkt.

Ein Objekt bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Kreisbahn, wie in Abbildung 48 dargestellt. Obwohl die Geschwindigkeit konstant bleibt, ist das Objekt dennoch beschleunigt, da Beschleunigung nicht nur eine Änderung im Geschwindigkeitsbetrag, sondern auch eine Richtungsänderung einschliesst.

Abbildung 48 illustriert, wie sich Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor während einer gleichförmigen Kreisbewegung verhalten. Beide Vektoren behalten ihre Grösse bei, ändern jedoch stetig ihre Richtung. Während die Geschwindigkeit stets tangential zur Kreisbahn verläuft, zeigt die Beschleunigung konstant zum Mittelpunkt des Kreises. Deshalb wird diese Beschleunigung Zentripetalbeschleunigung (''mittelpunktsuchende'' Beschleunigung) oder Radialbeschleunigung (da sie entlang des Radius zum Kreismittelpunkt hingerichtet ist) genannt und wir bezeichnen sie mit $\vec{a}_r$. Der Betrag der Radialbeschleunigung wird durch folgende Formel bestimmt:

$$a_r = \frac{v^2}{r}$$

wobei r der Radius der Kreisbahn und v der Betrag der Geschwindigkeit des Teilchens ist.

Während dieser Beschleunigung bei konstanter Geschwindigkeitsbetrag legt das Teilchen den Umfang des Kreises in der Zeit T zurück:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

T wird als Periode der Bewegung bezeichnet. Im Allgemeinen bezeichnet man damit die Zeit, die ein Teilchen benötigt, um eine geschlossene Bahn genau einmal zu durchlaufen.

3.5.2.1. Geometrische Herleitung der Gleichung

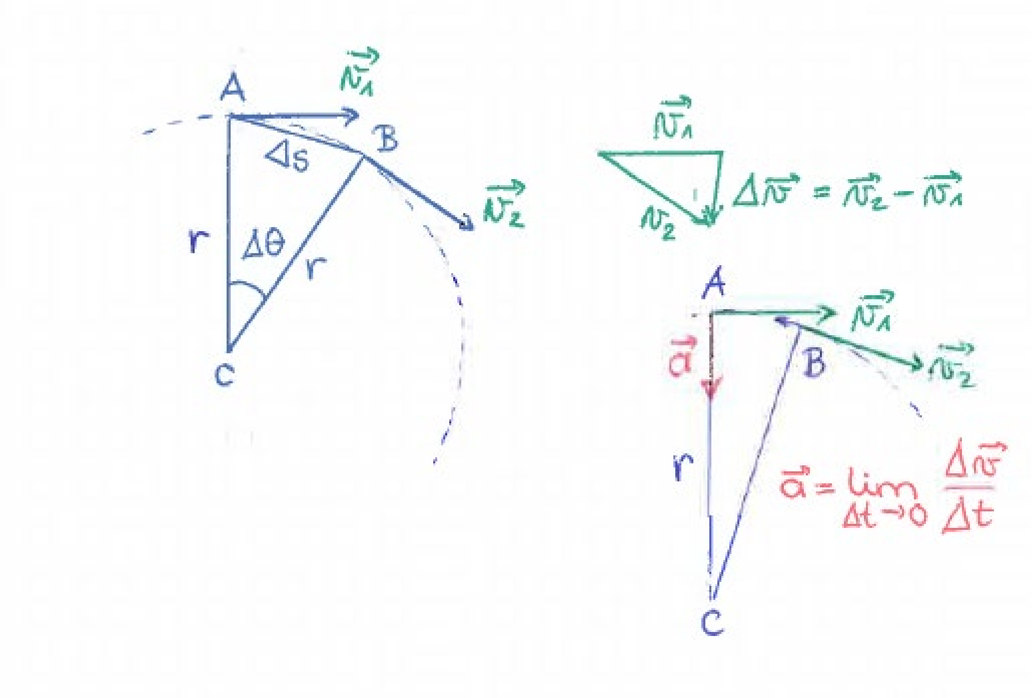


Abbildung 48 Geometrische Herleitung der Gleichung für die Radialbeschleunigung.

Die Beschleunigung hatten wir definiert als

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

In der Abbildung 49 ist ein Objekt gezeigt, das sich mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag auf einer Kreisbahn bewegt. Eingezeichnet sind auch seine Geschwindigkeitsvektoren zu zwei verschiedenen Zeitpunkten. Während der Zeit Δt bewegt das Objekt von Punkt A nach Punkt B. In dieser Zeit beträgt seine Verschiebung Δs. Die Änderung des Geschwindigkeitsvektors

$$\Delta\vec{v} = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_1}$$

ist auch in der Abbildung 44 gezeigt. In diesem Fall ist $\overrightarrow{v_2}$ fast parallel zu $\overrightarrow{v_1}$ und $\Delta\vec{v}$ steht praktisch senkrecht zu ihnen. Somit ist $\Delta\vec{v}$ zum Kreismittelpunkt hingerichtet. Da $\vec{a}$ laut Definition in dieselbe Richtung zeigt wie $\Delta\vec{v}$, muss auch $\vec{a}$ zum Kreismittelpunkt hingerichtet sein.

Als nächstes bestimmen wir den Betrag der Zentripetalbeschleunigung $\vec{a}_r$. Aus der Tatsache, dass CA senkrecht zu $\overrightarrow{v_1}$ und CB senkrecht zu $\overrightarrow{v_2}$ steht, folgt, dass der Winkel $\Delta\theta$, der als der Winkel zwischen CA und CB in Abbildung 49 definiert ist, auch der Winkel zwischen $\overrightarrow{v_1}$ und $\overrightarrow{v_2}$ ist. Folglich bilden die Vektoren $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ und $\Delta\vec{v}$, ein Dreieck, das dem Dreieck CAB geometrisch ähnelt. Es gilt $v_1 = v_2 = v$, weil sich der Betrag der Geschwindigkeit nicht ändert. Also können wir schreiben:

$$\frac{\Delta v}{v} \approx \frac{\Delta s}{r}$$

Die Gleichung wird exakt, wenn wir Δt gegen Null streben lassen. Lösen wir die Gleichung nach Δv auf:

$$\Delta v \approx v\frac{\Delta s}{r}$$

und dividieren durch das Zeitintervall

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \approx \frac{v}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Wenn wir jetzt das Zeitintervall gegen Null gehen lassen, dann erhalten wir die Radialbeschleunigung

$$a_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t}$$

mit

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Erhalten wir:

$$a_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta t} = v\frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}$$

Beispielaufgabe Astronautin

Eine Astronautin rotiert in einer horizontalen Zentrifuge mit Radius 5.0 m. Wie gross ist der Geschwindigkeitsbetrag der Astronautin, wenn ihre Beschleunigung einen Betrag von 7.0 g (sieben mal die Erdbeschleunigung) besitzt? Wie viele Umdrehungen pro Minute braucht man, um eine solche Beschleunigung zu erhalten? Wie gross ist die Periode der Bewegung?

Lösung

Wir wenden die Gleichung für die Zentripetalbeschleunigung $a_r = \frac{v^2}{r}$ und die Gleichung für die Periode $T = \frac{2\pi r}{v}$ einer gleichförmigen Kreisbewegung auf die Astronautin an und erhalten:

$$v = \sqrt{r a_r} = \sqrt{(5.0\ m)(7)\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)} = 19\ m/s$$

Die Zeit, um einmal zu rotieren ist die Periode

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(5.0\ m)}{19\ m/s} = 1.75\ s$$

In einer Minute führt sie

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{60\ s}{1.75\ s} = 35$$

Umdrehungen aus. Also sind 35U/min nötig, um eine Zentripetalbeschleunigung von 7 g zu erreichen, wenn der Radius 5.0 m beträgt.

Beispielaufgabe Äquator

Der Erdradius ist gegeben durch $6.37 \cdot 10^6$ m. Wie gross ist der Betrag der Beschleunigung eines Objekts am Äquator aufgrund der Erddrehung. Wie gross müsste die Periode der Erddrehung sein, damit ein Objekt am Äquator eine radiale Beschleunigung mit einem Betrag von g (Erdbeschleunigung) erfährt?

Lösung

Der Geschwindigkeitsbetrag eines Objekts am Äquator ist

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(6.37 \cdot 10^6\ m)}{(24h)(60\frac{min}{h})(60\frac{s}{\min})} = 436\ m/s$$

Der Betrag der Beschleunigung ist gegeben durch:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(436\frac{m}{s}\right)^2}{6.37 \cdot 10^6\ m} = 0.034\frac{m}{s^2}$$

Setzen wir den Geschwindigkeitsbetrag eines Objekts am Äquator $v = \frac{2\pi r}{T}$ in den Betrag der Beschleunigung $a_r = \frac{v^2}{r}$ ein, so erhalten wir eine Gleichung, welche die Periode T mit der Radialbeschleunigung ar verknüpft:

$$a_r = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{(2\pi)^2 r}{T^2}$$

aufgelöst nach der Periode T gibt das:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{a_r}} = 2\pi\sqrt{\frac{6.37 \cdot 10^6\ m}{9.81\ m/s^2}} = 5100\ s = 84\ \min$$

Das ist sehr viel schneller als in Realität. Die Erdanziehung kommt nicht von der Kreisbewegung!